PROGRAMA DE INGRESO

UNDAV
UNIVERSIDAD NACIONAL DE AVELLANEDA

SEMINARIO DE MATEMÁTICA

GRUPO 1

Ingeniería en Informática - Ingeniería en Materiales

Coordinadora del Programa de Ingreso:

Lic. Laura Cativa.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE AVELLANEDA -UNDAV-

PROGRAMA DE INGRESO

SEMINARIO DE MATEMÁTICA

Ingeniería en Informática - Ingeniería en Materiales

Gastón Andrés Freire.

Ing. Gregorio Oscar Glas.

Colaboración:

Ing. Gabriel Maresca.

Adrián Marcelo Soria Sasías.

Lic. María Del Carmen Pérez.

Índice general

Parte I

Conjuntos Numéricos

Capítulo 1

Introducción a la noción de conjunto

1.1. Generalidades

En un marco intuitivo al nivel más elemental, los conjuntos son como *bolsas* dentro de las cuales podemos agrupar colecciones de elementos. Por ejemplo, el conjunto formado por las frutas cítricas que se venden habitualmente en una verdulería podría contener los siguientes elementos: naranja, mandarina, limón y pomelo.

Una forma de escribir en un papel o en la pantalla de la computadora como está formado este conjunto de distintas frutas consiste en enumerar los mismos colocados entre llaves y separados por comas o por puntos y comas todos los elementos que contiene:

$$A = \{\text{Naranja, mandarina, limón, pomelo}\}$$

La forma en que hemos definido el conjunto anterior no es casual. En general, para definir cualquier conjunto, le pondremos un *nombre* al mismo como ser, en el ejemplo anterior "A", y en el otro miembro de la igualdad podemos enumerar entre llaves todos los elementos que contiene dicho conjunto.

La noción de conjunto es sumamente natural y aparece en numerosas situaciones de la vida cotidiana:

- Cuando en un cajón guardamos nuestra ropa interior separada del resto de la ropa, en realidad estamos definiendo un conjunto, y separando los elementos seleccionados del resto de nuestras vestimenta, a los efectos de tener a mano los mismos.
- Cuando en la heladera hay un cajón especial destinado a frutas y verduras, ese lugar funciona como si fuera un conjunto dentro del cual ubicaremos ciertos elementos, para separarlos del resto de las cosas que están en la heladera.
- El cajón de los cubiertos separa del resto de las cosas los utensilios que utilizamos para comer.

Podríamos seguir indefinidamente dando ejemplos de situaciones de la vida cotidiana donde nosotros — *los seres humanos* — utilizamos en forma práctica la noción de conjunto de manera habitual.

Sin embargo, ya a partir de la primera noción que tratemos, debemos establecer una gran diferencia entre lo que nos indica nuestra intuición y la forma de considerar los elementos en matemática.

La matemática no permite tratar elementos y sus relaciones en forma ambigua, es decir que no se entienda universalmente lo que se quiere escribir. Por ello se crearon una serie de reglas *formales*, *notaciones*, *símbolos*, o una *sintaxis* especial de modo que no existan dudas sobre lo que se quiera expresar.

Por este motivo debemos, desde el punto de vista matemático formalizar la noción de conjunto mediante una notación específica. Para ello deberemos *definir* en forma concreta y sin ambigüedades la manera de hacerlo.

Así hay dos maneras bien diferenciadas de indicar un conjunto en matemática que se formalizarán mediante *definiciones*:

1. ***Definir un conjunto por extensión:*** Enumerando entre llaves explícitamente todos los elementos de un conjunto, uno a uno.

   Por ejemplo, el conjunto:

   $$A = \{\text{Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes}\}$$

   contiene los días hábiles de la semana.

   En algunas ocasiones la cantidad de elementos del conjunto que queremos definir es muy grande, y entonces no resultaría práctico hacer una enumeración completa de todos sus elementos. Esto no quiere decir que no lo podamos definir por extensión, sino que tendremos que hacerlo de una forma más práctica, suponiendo que por la naturaleza de los elementos del conjunto, luego de enumerar algunos elementos del mismo, estos nos permitirían deducir cuáles son los otros. Por ejemplo, si quisiéramos definir un conjunto por extensión conteniendo todos los números pares comprendidos entre el 2 y el 100, en lugar de colocar los cincuenta elementos entre llaves, podemos colocar por ejemplo los primeros tres o cuatro elementos, luego de lo cual se colocan puntos suspensivos, y se finaliza con los dos o tres últimos elementos del mismo. Simbólicamente, el conjunto de los números pares comprendidos entre 2 y 100 se definiría por extensión del siguiente modo:

   $$B = \{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 98,\ 100\}$$

2. ***Definir un conjunto por comprensión:*** Enunciando una propiedad que verifiquen exactamente los elementos de dicho conjunto.

   A modo de ejemplo, el conjunto anterior podríamos definirlo por comprensión — *de comprender sin ambigüedad* — como sigue:

   $$A = \{x/x \text{ es un día hábil de la semana.}\}$$

   que se lee: A es el conjunto formado por los elementos x tales que x es o representa un día hábil de la semana.

   Con la letra x se indica un elemento arbitrario de cualquier conjunto, que si cumple la condición que se encuentra del lado derecho de la barra, entonces formará parte del conjunto A que queremos definir.

   La barra "/" es un símbolo que en la notación utilizada comúnmente en matemática tiene el significado de *"tal que"*. A medida que avancemos en nuestro estudio iremos introduciendo otros símbolos que se utilizan normalmente en matemática para simplificar y lograr una mayor precisión en la escritura.

Una noción importante en conjuntos es la noción de pertenencia. Por ejemplo, el día "Lunes" *pertenece* al conjunto A definido anteriormente, mientras que el día sábado *no pertenece* al mismo. En símbolos, la pertenencia se indica por "$\in$", y la no pertenencia se indica tachando el símbolo de *pertenecer*, es decir por "$\notin$".

Por ejemplo:

$$\text{Lunes} \in A$$

indica que el día Lunes es un elemento del conjunto A — y se lee *"Lunes pertenece a A"*. Por el contrario:

$$\text{Sábado} \notin A$$

indica que el día Sábado no es un elemento del conjunto A — y se lee *"Sábado no pertenece a A"*.

1.2. Importancia de las definiciones en matemática

En la sección anterior surgió por primera vez la necesidad de utilizar una palabra clave, de importancia crucial en todas las ciencias y la tecnología: la palabra *definición*. Aunque a lo largo de nuestra vida cotidiana estamos acostumbrados a tratar intuitivamente con definiciones, en la práctica muy pocas veces nos percatamos de la importancia de las mismas para poder comprender y percibir el mundo que nos rodea.

Por ejemplo, si alguien pronuncia la palabra *silla*, con seguridad en las mentes de quienes escuchan y de quien emite dicha palabra se representará en forma inmediata la imagen de un objeto, con la forma típica de lo que su cerebro entiende que es una silla. Cada persona construirá en su mente una representación diferente y es claro que la silla imaginada por alguien en particular seguramente distará mucho de ser igual a la silla imaginada por otra persona, dado que hay muchos tipos de sillas diferentes. En realidad esto no es grave a un nivel coloquial, pues mientras todos estemos de acuerdo que una silla es un objeto con patas, una base sobre la cual sentarnos y un respaldo sobre el cual apoyar nuestra espalda, en definitiva no estaremos tan en desacuerdo unos de otros sobre el concepto de *silla*. Hasta ahora no pareciera ser tan grave dejar la idea de *silla* a la libre imaginación de cada uno, sin necesidad de hacer una definición precisa de la noción de silla. ¿Por qué? Evidentemente porque vemos sillas por todos lados. No hay posibilidad de mal interpretar la palabra *silla* porque estamos acostumbrados a toparnos con ellas habitualmente.

Hagamos ahora otro intento, imaginemos lo que ocurriría en la mente de una persona si alguien pronuncia la palabra *mandrias*. Es muy probable que quien escuche esta extraña palabra no tenga la menor idea de su significado. De hecho, es una palabra muy poco común, muy poco utilizada y por lo tanto lo más probable es que en nuestra mente no se represente ningún tipo de idea o imagen. ¿Qué hacemos cuando ocurre esto? Normalmente recurrimos al diccionario ya sea el típico diccionario escrito en papel, o en la web:

Mandrias: Apocado, inútil y de escaso o ningún valor. Holgazán, vago.

Es claro que antes de leer el diccionario no teníamos la más remota idea del significado de esa palabra, pero luego de recurrir al mismo ahora comprendemos de qué se nos está hablando. En este sentido el diccionario nos proporciona la *definición* de la palabra *mandrias*, y definirla fue imprescindible para comprender su significado.

Hasta ahora analizamos dos casos extremos, es decir lo que ocurre en nuestra mente cuando se nos presenta una palabra ampliamente conocida por nosotros, y en el lado opuesto, lo que ocurre cuando se nos presenta otra de la cual no tenemos la menor idea. Sin embargo hay una tercera posibilidad, que puede llegar a ser más peligrosa que las dos primeras: la mala interpretación. Por ejemplo si alguien menciona la palabra *anillo*, seguramente se nos representará en la mente un objeto hueco y redondo que sirve para introducirlo en alguno de nuestros dedos. Es tan conocida la palabra *anillo* que en la mayoría de la gente no cabe la menor duda que se realizará la interpretación antes propuesta. Sin embargo, en el contexto matemático la palabra *anillo* significa otra cosa ni por casualidad similar o parecida a la interpretación usual de dicha palabra. En matemática un anillo es un conjunto dotado con dos operaciones que guardan una estrecha relación entre sí. No viene al caso describir matemáticamente en este momento el significado concreto y preciso de la palabra *anillo*, pero es evidente que si no indicáramos previamente lo que entenderemos por dicha palabra en el contexto matemático, la interpretación coloquial de la misma nos llevará a cometer serios errores.

Precisamente por esto último resulta fundamental definir el significado de las palabras cuando uno hace ciencia en general. Porque esta última necesita del lenguaje, y en numerosas ocasiones utiliza palabras con otro significado completamente distinto y particular para cada disciplina o técnica. Cuando ocurra esto, necesitaremos imperiosamente *definir* el uso que le daremos a esa palabra en el contexto en que la utilizaremos, para evitar posibles ambigüedades, confusiones o malas interpretaciones.

1.3. Operaciones básicas entre conjuntos

Antes de hablar de operaciones entre conjuntos es preciso definir lo que entenderemos por la palabra *operación*. En matemática dicha palabra se utiliza para hacer alusión a una serie de pasos o procedimientos a seguir para, a partir de una serie de objetos determinados, combinarlos de alguna manera para producir otro objeto denominado *resultado*. Todos conocemos — *por lo menos a un nivel intuitivo* — la idea de *suma* entre dos números. La *suma* es una *operación* que a partir de dos números dados produce un tercer número llamado *suma de los dos primeros*. Dicha operación se simboliza mediante el operador “+”, el cual se ubica entre medio de los dos números que se pretenden sumar. Por ejemplo:

$$2 + 3 = 8$$

significa que la operación *suma* se ha aplicado a los números 2 y 3, produciendo como resultado al número 8.

Es decir, entenderemos por *operación* a la serie de pasos y procedimientos a seguir para producir — *a partir de una serie de objetos dados* — un nuevo objeto llamado *resultado* de dicha operación.

Las principales operaciones entre conjuntos son básicamente las siguientes:

Unión: Dados dos conjuntos, por ejemplo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6, 7\}$ que se han definido por extensión, definimos al conjunto unión entre A y B como:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

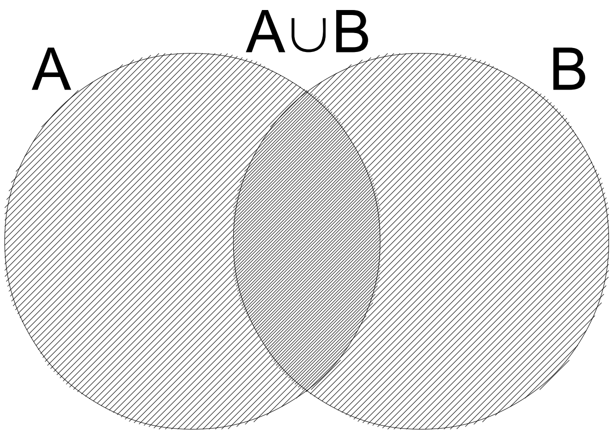
— que se lee *A unión B.* Es decir la unión de dos conjuntos es un nuevo conjunto que reúne los elementos del primero más los elementos del segundo.

Se debe notar que los elementos "4" y "5" comunes a ambos conjuntos, no se repiten en el nuevo conjunto $A \cup B$.

Al definir la operación *unión* de dos conjuntos se quiere indicar que, mediante ella, se obtiene un nuevo conjunto $C = A \cup B$ que no contiene elementos repetidos.

Gráficamente podemos expresar la unión de los conjuntos A y B mediante diagramas que se conocen como Diagramas de Venn — *como se muestra en la* Fig 1.3.1.

Figura 1.3.1: Diagrama de Venn de la Unión



En esta figura puede apreciarse el Diagrama de Venn correspondiente a la unión de conjuntos $A \cup B$. El conjunto $A \cup B$ está formado por todos los elementos de los conjuntos A y B que se encuentran en las zonas indicadas con el rayado simple y los elementos comunes indicados en la zona de rayado doble, pero considerados una sola vez.

Formalmente la definición de *unión* entre dos conjuntos se podría escribir de la siguiente forma:

Definición. Dados los conjuntos A y B definimos la unión entre A y B según:

$$A \cup B = \{x/x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

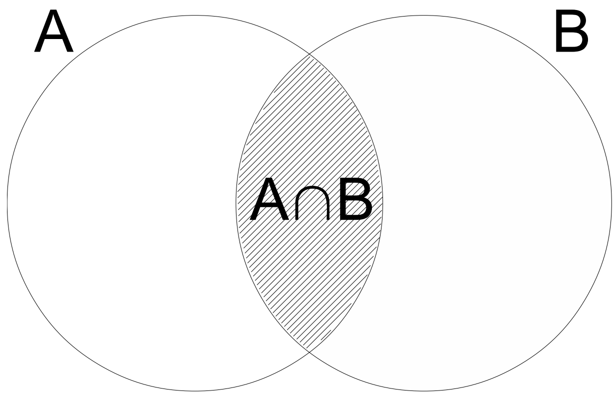
donde el símbolo "$\vee$" significa "o" y quiere decir que el elemento x pertenecerá al conjunto $A \cup B$ si y sólo si x pertenece al conjunto A o x pertenece al conjunto B.

Intersección: Dados dos conjuntos A y B, por ejemplo los elegidos anteriormente, la operación intersección entre A y B se define como el conjunto cuyos elementos son aquellos que pertenecen al conjunto A y al conjunto B simultáneamente. Esto es:

$$A \cap B = \{4, 5\}$$

Se lee "*A intersección B*" y consta de los elementos 4 y 5 que son precisamente esos números los que pertenecen a A y a B simultáneamente. Gráficamente podemos expresar la intersección entre los conjuntos A y B mediante su respectivo Diagramas de Venn — *como se muestra en la* Fig. 1.3.2.

Figura 1.3.2: Diagrama de Venn de la Intersección



En esta figura puede apreciarse el Diagrama de Venn correspondiente a la intersección de conjuntos $A \cap B$.

Formalmente la definición de *intersección* entre dos conjuntos se podría escribir de la siguiente forma:

Definición. Dados los conjuntos A y B definimos la intersección entre A y B según:

$$A \cap B = \{x/x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

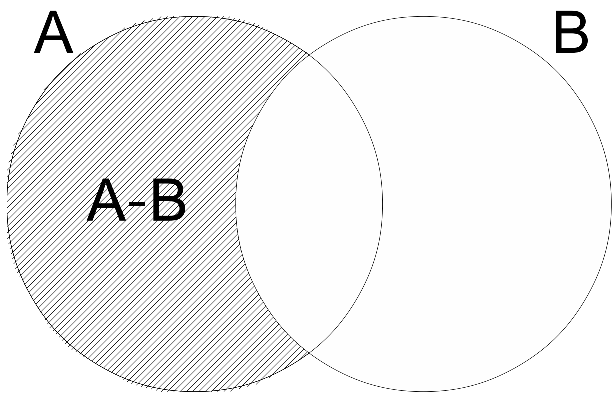
donde el símbolo "$\wedge$" significa "y" y quiere decir que el elemento x pertenecerá al conjunto $A \cap B$ si y sólo si x pertenece al conjunto A y x pertenece al conjunto B simultáneamente.

Diferencia: La operación diferencia entre dos conjuntos A y B se define como el conjunto que contiene aquellos elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. En símbolos esto es:

$$A - B = \{1,\ 2,\ 3\}$$

Se lee "*A menos B*" y consta de los elementos 1, 2 y 3 porque esos números pertenecen al conjunto A y no pertenecen al conjunto B. Gráficamente podemos expresar la diferencia entre los conjuntos A y B mediante su respectivo Diagramas de Venn — *como se muestra en la* Fig. 1.3.3.

Figura 1.3.3: Diagrama de Venn de la Diferencia



En esta figura puede apreciarse el Diagrama de Venn correspondiente a la diferencia de conjuntos $A - B$.

Formalmente la definición de *diferencia* entre dos conjuntos se podría escribir de la siguiente forma:

Definición. Dados los conjuntos A y B definimos la diferencia entre A y B según:

$$A - B = \{x/x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

queriendo decir que el elemento x pertenecerá al conjunto $A - B$ si y sólo si x pertenece al conjunto A y x no pertenece al conjunto B.

Ejemplo 1.3.1. Como ejercicio, consideremos los conjuntos:

$$A = \{\text{Lunes, Miercoles, Viernes}\}$$
$$B = \{\text{Martes, Miercoles, Jueves}\}$$

Calcularemos las tres operaciones básicas entre estos conjuntos:

$$A \cup B = \{\text{Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes}\}$$
$$A \cap B = \{\text{Miércoles}\}$$
$$A - B = \{\text{Lunes, Viernes}\}$$

A lo largo del texto utilizaremos ampliamente la noción de conjunto, razón por la cual debemos conceptualizar su significado para que de aquí en más nuestro abordaje a dicha noción pueda realizarse de manera intuitiva, facilitando su comprensión.

Ejemplo 1.3.2. Consideremos ahora los conjuntos:

$$A = \{\text{Lunes, Miércoles, Viernes}\}$$
$$B = \{\text{Martes, Jueves}\}$$

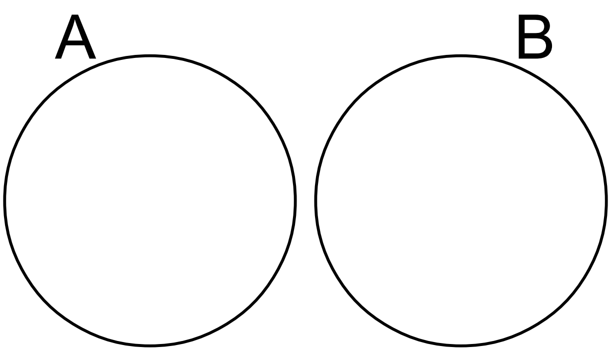
Si se realizan las tres operaciones básicas entre estos conjuntos:

$$A \cup B = \{\text{Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes}\}$$
$$A \cap B = \{\} \leftarrow \text{Carece de elementos}$$
$$A - B = \{\text{Lunes, Miércoles, Viernes}\}$$

Como se ve en la segunda operación, el resultado es un conjunto que carece de elementos — *ver* FIG. 1.3.4. Al conjunto resultante se lo denomina *conjunto vacío* y se simboliza matemáticamente o bien con un par de llaves {} sin ningún elemento indicado explícitamente o bien mediante el símbolo $\emptyset$. Podemos escribir indistintamente en este caso[1]:

$$A \cap B = \{\} \qquad \text{ó} \qquad A \cap B = \emptyset$$

Figura 1.3.4: DIAGRAMA DE VENN DE DOS CONJUNTOS SIN ELEMENTOS EN COMÚN



En la figura puede apreciarse el DIAGRAMA DE VENN correspondiente a dos conjuntos A y B que no tienen ningún elemento en común.

[1] Si bien al conjunto vacío se lo puede simbolizar indistintamente por {} o $\emptyset$, no es correcto referirse al mismo mediante la notación $\{\emptyset\}$ pues esta última alude a un conjunto cuyo único elemento es el conjunto vacío, y por lo tanto al contener un elemento, deja de ser un conjunto vacío.

Capítulo 2

Números Naturales $\mathbb{N}$

2.1. Teoría Básica

Los números naturales $\mathbb{N}$ surgen de la necesidad de los pueblos primitivos de contar o enumerar los elementos de ciertos conjuntos. Por ejemplo, si nuestra actividad principal consistiera en la cría de ganado, podríamos utilizar el concepto de número natural para enumerar la cantidad de vacas, ovejas, caballos, etc. que disponemos en nuestro corral. Sin duda alguna, el concepto de *número* significó un gran avance en el desarrollo evolutivo de la humanidad, y su origen — *en la cultura occidental* — se remonta hacia el año 4000 A.C. en la Mesopotamia, entre los ríos Tigris y Éufrates en Asia Occidental, donde aparecen los primeros vestigios de los números que consistieron en grabados de señales en formas de cuñas sobre pequeños tableros de arcilla empleando para ello un palito aguzado.

A continuación definiremos al conjunto de números naturales tal y como suele hacerse modernamente, a partir de las nociones básicas de conjuntos que vimos en la introducción.

Definición 2.1.1. El conjunto de números naturales se define por extensión como:

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n,\ \cdots\}$$

y sus elementos son los números que se utilizan para contar o enumerar cosas. En la notación utilizada "n" representa un *número natural genérico* que va tomando todos los valores posibles a partir del número 5, ya que 1, 2, 3 y 4 se escribieron explícitamente.

Observemos que la disposición de estos números no es arbitraria, sino que hemos elegido por convención que el valor de los números naturales crecen hacia la derecha, es decir que los números naturales tienen la propiedad de ser un conjunto de elementos ordenados.

El primer elemento del conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ es el número 1, al cual denominaremos *unidad* de dicho conjunto numérico. Cada número que sigue a la derecha en la definición de $\mathbb{N}$ se incrementa en una unidad con respecto al anterior.

Puede verse que el valor del número 2 será una unidad mayor que el del número 1 y el valor del número 4 será dos unidades mayor que la del número 2, y así sucesivamente.

Definición 2.1.2. El conjunto de números naturales incluyendo al 0 se define por extensión como:

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots,\ n,\ \cdots\}$$

donde debe quedar claro que $\{0\}$ no es el conjunto vacío, sino que es un conjunto que posee como único elemento al número cero. Los elementos del conjunto son los mismos que los del conjunto de números naturales, con el agregado de un elemento extra, el número cero.

2.1.1. Operaciones con números naturales

Antes de comenzar a describir las operaciones con números naturales así como también sus propiedades, comenzaremos por aclarar que el conocimiento de estas últimas, si bien es importante para operar correctamente en aritmética, se vuelve imprescindible cuando pasamos de la aritmética al álgebra.

La aritmética es la rama de la matemática que se ocupa de los números y las operaciones elementales hechas con ellos, pero cuando decimos *números* nos referimos a *números concretos* que poseen un valor determinado. Por ejemplo la aritmética se ocupa de resolver cuestiones como hallar el resultado de la siguiente operación:

$$(2 + 3) \cdot 7$$

que puede ser efectuada de muchas maneras:

$$\begin{aligned}(2 + 3) \cdot 7 &= 5 \cdot 7 = 35\\ (2 + 3) \cdot 7 &= 2 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 14 + 21 = 35\end{aligned}$$

Como vemos es posible resolver primero la operación $2 + 3$ y luego multiplicar por 7, o bien podemos efectuar la propiedad distributiva para calcular primero $2 \cdot 7$, luego $3 \cdot 7$ y por último sumar los resultados.

Se puede interpretar — *con justa razón* — que no tiene sentido hacer la cuenta de la segunda manera, pues es más práctica la primera forma de hacerlo, ya que a simple vista se ve que es más corta. En este sentido la aplicación de la propiedad distributiva no parece beneficiarnos en nada.

El álgebra se ocupa de estudiar cómo realizar operaciones cuando en el caso de uno o más números no se conoce su valor, y de acuerdo con las operaciones que se plantean pueden tomar uno, dos, o más valores. Para ello a los números que no poseen un valor determinado se los representa con letras y el tratamiento de operaciones involucrando esas letras resulta más delicado. El álgebra se ocupa de estudiar cómo trabajar con dichas expresiones. En muchos casos se trabaja sobre la cadena de números concretos y letras — *símbolos* — para transformarlas en cadenas de operaciones equivalentes, pero más sencillas.

La diferencia fundamental entre la aritmética y el álgebra reside justamente en que la primera utiliza sólo números concretos en tanto que la segunda una combinación de números y letras cuando se plantean una serie de operaciones entre estos símbolos.

La siguiente combinación de operaciones es un ejemplo de lo que más adelante definiremos como *expresión algebraica*:

$$\frac{(a + 3) \cdot 5 - 5}{5}$$

Sobre ella se pueden realizar las operaciones indicadas de modo tal que si operamos correctamente resultará otra expresión algebraica equivalente a esta, pero mucho más sencilla:

$$\begin{aligned}\frac{(a + 3) \cdot 5 - 5}{5} &= \frac{a \cdot 5 + 3 \cdot 5 - 5}{5} = \frac{5a + 15 - 5}{5}\\ &= \frac{5a + 10}{5} = \frac{5}{5}a + \frac{10}{5}\\ &= a + 2\end{aligned}$$

Para poder pasar de la primera expresión a la segunda fue necesario conocer las reglas y propiedades que definen y rigen a las operaciones, lo que está plenamente justificado dado que la segunda expresión — *equivalente a la primera* — es mucho más sencilla. Cualquier error que se cometa en la operatoria matemática llevaría muy probablemente a que la expresión final deje de ser equivalente a la primera, por lo que sería incorrecto utilizarla en su lugar.

En esta sección estudiaremos las operaciones fundamentales de los números naturales que solemos hacer normalmente en todo momento y las propiedades que las rigen. Tal como dijimos en el capítulo anterior, tenemos que encarar un estudio formal sobre el tema y por eso necesitaremos que queden claramente definidas dichas operaciones y analizar sus propiedades.

Comenzaremos definiendo la suma de dos números, que es la operación más simple a partir de la cual se podrán definir las restantes operaciones.

Definición 2.1.3. Diremos que la operación suma, representada por el símbolo "+", es una operación sobre el conjunto de números naturales, si y sólo si para todo par de números $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{N}$, existe un cierto número c también perteneciente al conjunto $\mathbb{N}$ tal que:

$$a + b = c$$

En este sentido se dirá que c es el resultado de *aplicar* la *operación* "+" a los números a y b. Observemos que hemos representado a los tres números de la expresión matemática anterior por letras para indicar que los números a sumar a y b pueden tomar cualquier valor, pero una vez que le demos valores a a y b, el valor del número c sólo puede tomar un valor. Diremos en este caso que el valor de c queda *unívocamente determinado* por los valores de a y b. Por ejemplo:

$$3 + 4 = 7$$

en este caso $a = 3$, $b = 4$ y $c = 7$.

Otro ejemplo de operación es la resta usual, por ejemplo:

$$7 - 4 = 3$$

en donde la operación en este caso es la resta, que se simboliza por "−", esta vez es la resta y en este caso el resultado es $3 \in \mathbb{N}$.

Sin embargo, la operación:

$$4 - 7$$

produce un resultado que no pertenece al conjunto de números naturales $\mathbb{N}$.

La operación "−" entre dos números naturales $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{N}$, "$a - b$", dará un resultado perteneciente a $\mathbb{N}$ sólo si el valor que representa la letra a es mayor que el representado por la letra b, lo cual se indica matemáticamente con el símbolo "$>$" de la siguiente forma: "$a > b$". También se puede escribir: "$b < a$" donde el símbolo "$<$" significa que el número natural a la izquierda de dicho símbolo es menor que aquel ubicado a la derecha.

Lo expresado implica que debemos definir clara y rigurosamente las propiedades de las operaciones entre números naturales, tal como lo haremos a continuación:

Definición 2.1.4. Diremos que una operación es *cerrada* en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales si luego de aplicar dicha operación a dos números naturales a y b para obtener un resultado c, éste último es a su vez un número natural.

Si bien la definición 2.1.3 nos sirve para describir la operación suma, en ella hay aspectos no contemplados como por ejemplo la descripción de cómo realizar una suma en particular, por lo cual conviene realizarla de manera *formal*, lo que nos permite a la vez acostumbrarnos a estas formas típicas de expresar rigurosamente los conceptos en ciencia y tecnología.

Definición 2.1.5. La suma de números naturales "+" es una operación que se puede definir formalmente como sigue: Dado un conjunto A que contiene n elementos, y un conjunto B que contiene m elementos, y además suponiendo que los conjuntos A y B no poseen ningún elemento en común, es decir $A \cap B = \emptyset$, entonces la suma $n + m$ será la cantidad de elementos del conjunto $A \cup B$.

Definición 2.1.6. La resta de números naturales "−" es una operación que se define como: $a - b = c$ si y sólo si $a = b + c$, donde a, b y c son números naturales.

Esta operación no es *cerrada* en $\mathbb{N}$.

Definición 2.1.7. El producto de números naturales "·" es una operación que se define como: $a \cdot b = c$ si y sólo si la suma de a con sigo mismo b veces da como resultado al número c, donde a, b y c son números naturales. (Análogamente resulta lo mismo obtener el producto $a \cdot b$ sumando b con sigo mismo a veces).

La operación producto es *cerrada* en $\mathbb{N}$.

Definición 2.1.8. El cociente entre dos números naturales "a:b" o bien "$\frac{a}{b}$" o bien "a/b", se define como $\frac{a}{b} = c$ si y sólo si $a = b \cdot c$.

Normalmente utilizaremos para indicar el cociente entre dos números naturales la notación "$\frac{a}{b}$", donde la linea que separa a y b se denomina *raya de fracción* cuyo significado se podrá comprender mejor al estudiar números racionales.

La operación cociente no es cerrada en $\mathbb{N}$. ¿Por qué?

Definición 2.1.9. Los símbolos utilizados para representar las operaciones matemáticas: $+$, $-$, $\cdot$, $:$, etc., se denominarán *símbolos operacionales* u *operadores matemáticos*.

A modo de ejemplo de situaciones en las que se podrían utilizar números naturales, tenemos:

- El número de invitados que asisten a una fiesta de cumpleaños.
- La cantidad de fotocopias que sacarán.
- El número de remeras que hay guardadas en un placar.
- La cantidad de CDs que guardas en tu colección de discos.

2.1.2. Relaciones de igualdad y orden

Dentro del conjunto de números naturales — *y también en otros conjuntos numéricos* — se definen tres relaciones fundamentales, a saber:

Definición 2.1.10. La relación de igualdad "=" permite establecer el hecho de que dos expresiones o fórmulas matemáticas cualesquiera son idénticas.

Por ejemplo:

$$2 \cdot 3 = 6$$

significa que el resultado de multiplicar al número 2 por el número 3 da como resultado el número 6.

Los elementos del conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ se pueden ordenar de menor a mayor, y viceversa. Esto motiva la definición de lo que se suele llamar *relaciones de orden*.

Definición 2.1.11. La relación orden entre dos números naturales distintos cualesquiera en cuanto a su valor, podrá indicarse mediante los símbolos "<" — *se lee menor que* — o ">" — *se lee mayor que* — según corresponda.

Por ejemplo:

- El número 1 es menor que el número 3, lo cual se indica simbólicamente mediante: $1 < 3$.
- El número 5 es mayor que el número 2, lo cual se indica simbólicamente mediante: $5 > 2$.

Definición 2.1.12. Los símbolos utilizados para indicar las relaciones de igualdad y orden se denominan *operadores relacionales* o *símbolos relacionales*.

2.1.3. Terminología básica utilizada en matemática

2.1.3.1. Expresión Matemática

Una expresión matemática es una secuencia o cadena de caracteres cuyos símbolos pertenecen a un lenguaje especializado — *denominado lenguaje formal para las matemáticas* — de tal manera que la expresión cumpla ciertas reglas de *sintaxis* que garanticen su buena formación — *por ejemplo la regla que indica que luego de cada paréntesis que se abra debe haber un paréntesis que cierre* — que admita una interpretación *consistente* — *con significado preciso* — en algún área de la matemática u otras ciencias.

En sintonía con la definición anterior, debemos observar que no cualquier expresión del lenguaje coloquial podrá tildarse de expresión matemática pues la misma, para ser considerada como tal, deberá cumplir ciertos requisitos no sólo sintácticos sino también semánticos — *es decir de significado*.

Por ejemplo, la expresión "*¡Qué ganas tengo de comer una tarta de manzana!*" es una oración bien construida, pero la misma es una oración desiderativa — *es decir que expresa un deseo* — manifestando el deseo de ingerir algún tipo de alimento, y por lo tanto no admite una interpretación consistente en algún área de la matemática.

Por el contrario, la expresión "*El número* 2 *es el único número natural primo que a la vez es par.*" está bien construida desde el punto de vista sintáctico y además tiene una clara interpretación matemática. En este sentido diremos que la misma es una expresión matemática.

En esta expresión el único *símbolo matemático* utilizado es el número 2 y el resto son palabras tomadas del lenguaje coloquial, aunque la interpretación de algunas de ellas — *como número natural, primo, o par* — debe ser la específica dada en el lenguaje formal de la matemática.

Observemos además — *en contraposición a una creencia habitual* — que una expresión matemática no se limita a una mera fórmula o expresión que contiene puramente símbolos matemáticos, sino que es mucho más abarcativa. Esto no quiere decir que las fórmulas no reserven un lugar destacado en lo que consideraremos expresión matemática, pues estas últimas son importantes en la medida que permiten relacionar magnitudes, variables y/o constantes entre sí. La noción de expresión matemática es más rica y amplia que la noción de fórmula, que es un caso particular de la primera.

2.1.3.2. Fórmula

Una *fórmula* es un caso particular de expresión matemática en donde no se permite la utilización de palabras del lenguaje coloquial, sino que la misma debe contener pura y exclusivamente símbolos matemáticos — *números, variables, constantes, operadores matemáticos, operadores relacionales, etc...*

2.1.3.3. Miembro

Si una expresión matemática se compone de otras dos expresiones matemáticas que expresan una relación entre las mismas, por ejemplo:

$$2 \cdot 3 = 6$$

diremos que cada una de las expresiones a ambos lados de la relación — *en este caso la igualdad* — es un *miembro*. En este sentido, la expresión anterior consta de dos miembros, el miembro izquierdo que es "$2 \cdot 3$" y el miembro derecho que es el número 6.

Análogamente si tenemos $2 \cdot 3 < 8$, en este caso expresa una relación de orden donde el miembro de la izquierda es $2 \cdot 3$ y el de la derecha es el número 8.

2.1.3.4. Término

En una expresión matemática compuesta de una suma o resta de otras expresiones, a cada una de ellas la llamaremos *término*. En este sentido, la expresión:

$$3x^2 - 2x + 1 = 5x - 3$$

los términos involucrados son $3x^2$, $2x$, 1, $5x$ y 3.

2.1.3.5. Factor

En una expresión matemática compuesta de un producto de otras expresiones, a cada una de ellas la llamaremos *factor*. Es decir la expresión:

$$(3x+1)\cdot(4x+3)\cdot\left(x^2+1\right)$$

está compuesta por tres factores, a saber:

$$3x+1 \qquad\qquad 4x+3 \qquad\qquad x^2+1$$

En caso de haber divisiones o fracciones como dividir por una expresión equivale a multiplicar por el inverso de dicha expresión entonces podemos identificar los factores como sigue:

$$\frac{3x+1}{x^2+1}$$

equivale a:

$$(3x+1)\cdot\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

de donde los factores son:

$$3x+1 \qquad\qquad \frac{1}{x^2+1}$$

2.1.3.6. Constante

En matemática las constantes son expresiones cuyo valor numérico es fijo y se indican muchas veces con un número. Por ejemplo el número natural 2 es una constante.

En otros conjuntos numéricos que se encuentran en los capítulos siguientes se pueden encontrar números como por ejemplo $\frac{3}{2}$ que es otra constante, pero a diferencia de la primera no es un número natural sino *fraccionario*. Ciertos números importantes no pueden expresarse como números fraccionarios y al escribirlos como números decimales poseen un cantidad infinita de números después de la coma donde no existe ningún grupo de estos números que aparezcan en forma repetida — *como por ejemplo los números π y e*.

Ejemplos de constantes importantes en matemática son:

- El número Pi, cuyo símbolo para designar esta constante es la letra griega π y es aproximadamente 3,1415926535.

  El número $\pi = 3{,}1415926535\cdots$ se obtiene como el cociente entre la longitud o perímetro C de cualquier circunferencia y el diámetro D de la misma.

- El número e que es aproximadamente $e \approx 2{,}7182$ surge en problemas de economía por un lado y en las ciencias naturales para expresar matemáticamente el comportamiento de muchos fenómenos. Se lo suele denominar *número de Euler* o *constante de Napier* por ser estos últimos los matemáticos que contribuyeron a su descubrimiento.

- El número de oro o proporción áurea, cuyo símbolo para designarlo es la letra griega ϕ, se define como:

  $$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398\cdots$$

  surge en Grecia y está presente en las proporciones utilizadas en ciertas construcciones arquitectónicas ilustres como ser por ejemplo El Partenón.

2.1.3.7. Variable

La noción de *variable* es de suma importancia en matemática. A diferencia de las constantes, las variables no poseen un valor numérico fijo, sino que el valor que adoptan las mismas puede ser cualquiera dentro de un subconjunto del conjunto numérico con el cual se está trabajando. Las variables se simbolizan matemáticamente mediante letras cualesquiera del alfabeto.

Para comprender la noción de variable es conveniente hacerlo a partir del análisis del papel que desempeñan en ciertas expresiones matemáticas concretas, como ser las de los ejemplos que siguen a continuación.

- Se sabe que el doble de un número natural coincide con el triple de dicho número disminuido en 20 unidades. Si llamamos n al número desconocido, entonces la expresión matemática que expresa la condición del enunciado es:

  $$2n = 3n - 20$$

  En esta expresión la variable es n y el conjunto numérico sobre el cual tomará valores dicha variable es $\mathbb{N}$. Sin embargo no cualquier número natural n verificará la igualdad propuesta. Por ejemplo:

  - Si $n = 30$ entonces el miembro izquierdo toma el valor 60 y el derecho el valor 70, de donde la igualdad propuesta no se verifica.
  - Si $n = 20$ entonces el miembro izquierdo toma el valor 40 y el derecho adopta el mismo valor, razón por la cual deducimos que $n = 20$ es un valor posible para la variable n donde se verifica la igualdad propuesta en el enunciado.

  En realidad el valor $n = 20$ es el único número natural para la variable n que hace que se verifique la igualdad anterior, pero no por ello diremos que n es una *constante*. La razón de esto último es que las constantes deben ser números *fijos*, mientras que n puede adoptar cualquier valor numérico natural, pero de todos esos números hay uno sólo que verifica la igualdad, a saber $n = 20$. El valor 20 es el único elemento del subconjunto del conjunto de números naturales que verifica dicha igualdad.

- Se sabe que un cierto número natural x disminuido en dos unidades, multiplicado por ese mismo número natural x disminuido en tres unidades, da como resultado el número cero.

  El número x en este caso satisface la igualdad:

  $$(x - 2) \cdot (x - 3) = 0$$

  Si queremos encontrar los valores de x que satisfacen la igualdad anterior, en este caso con sólo observar la expresión nos damos cuenta que los únicos números que verifican la igualdad son $x = 2$ y $x = 3$.

  Es decir, los valores de la variable x que cumplen con la igualdad anterior conforman un subconjunto $S \subseteq \mathbb{N}$ de dos elementos, que podemos definir por extensión de la siguiente forma:

  $$S = \{2, 3\}$$

- La expresión matemática que relaciona la temperatura en grados Celsius “C” con la temperatura en grados Fahrenheit “F” es la siguiente:

  $$F = \frac{9}{5}C + 32$$

  La expresión anterior involucra dos variables: F y C. Se denominan *variables* pues las mismas pueden tomar cualquier valor numérico que represente una cierta temperatura, medida en la escala correspondiente. Algunos valores posibles para estas variables, dentro del conjunto de números naturales $\mathbb{N}_0$ son:

C	F
5	41
0	32
10	50

En este último ejemplo se puede encontrar el valor de F para todos los números naturales C comprendidos entre 0 e infinito. El valor de F no necesariamente será un número natural, aún cuando el valor de C si lo sea. Podemos ver *por inspección* que la condición necesaria y suficiente para que F sea un número natural, es que C sea múltiplo de 5.

En este caso el subconjunto de los valores posibles de C coincide con el conjunto de números naturales $\mathbb{N}_0$ — *si bien los de F no de acuerdo a la observación anterior*. Es decir sea cual fuera el valor de C elegido dentro de los números naturales $\mathbb{N}_0$, siempre es posible hallar un correspondiente valor de F de modo tal que el par (C, F) satisfaga la igualdad. La razón de que ocurra esto es la presencia de dos variables en la expresión original, donde se permite fijar una de ellas en un valor determinado, y *adaptar* o *buscar* el valor de la otra que sea necesario para que se cumpla la igualdad. En el caso de los dos primeros ejemplos, en los cuales la expresión involucraba una única variable, vimos que para que la igualdad pueda cumplirse era necesario que dicha variable adopte ciertos valores concretos en particular, que serán precisamente los valores que satisfagan esa igualdad. En general, una igualdad entre dos expresiones matemáticas que involucre una variable y donde la igualdad se cumpla para ciertos valores de dicha variable, se denomina *ecuación*, y a la variable cuyos valores queremos encontrar para que se cumpla la igualdad, se la denomina *incógnita*.

2.1.3.8. Teorema

Se denomina *teorema* a cualquier razonamiento matemáticamente válido que partiendo de una serie de *hipótesis* tenga como finalidad establecer alguna conclusión llamada *tésis*.

Nota: En el campo de la matemática es usual enunciar teoremas para demostrar a través de un desarrollo matemático ciertas conclusiones que surgen a partir de sus hipótesis. En nuestro curso recurriremos al enunciado y demostración de teoremas sólo cuando consideremos que esa demostración tiene un valor didáctico importante.

2.2. Ejercicios

Los ejercicios del número 1 al 25 tienen el objeto de introducir mediante su ***resolución ordenada*** las propiedades de los números naturales y las operaciones matemáticas que pueden realizarse con ellos.

Si alguna operación no pudiera realizarse en el conjunto de los números naturales, colocar como resultado "*No es posible en el campo de* $\mathbb{N}$" — *o bien* $\mathbb{N}_0$ *según corresponda*.

Si se utiliza este material en clases presenciales en las que los estudiantes estuvieran divididos en grupos, sería deseable que se resuelvan todos en clase, *en forma correlativa*, analizando el significado de cada ejercicio en cada grupo, con la guía de los docentes.

De ser necesario en el debate grupal más conocimientos teóricos, se puede recurrir a la sección de TEORÍA COMPLEMENTARIA, como así también recurrir a ella luego de realizar la resolución de cada ejercicio o grupo de ejercicios para verificar las conclusiones obtenidas.

El procedimiento indicado en los tres párrafos anteriores debiera seguirse en todos los temas de esta publicación.

El mismo procedimiento debieran seguir aquellos que los resuelvan fuera de la clase presencial, donde resulta muy importante que en lo posible se reunieran para resolverlos en grupos de dos o tres personas. En caso de realizar la actividad en forma individual, se recomienda verificar las conclusiones y resultados obtenidos así como también los procedimientos utilizados y el lenguaje utilizado para describirlos.

De aquí en más y durante todo el curso, en cada problema o ejercicio que se resuelva, se debe explicar en palabras en forma escrita cada paso del procedimiento utilizado, indicando las propiedades que se usan en cada operación. Análogamente debe poder realizarse la explicación mediante uso del lenguaje en forma oral.

1. ¿Cuál es la *operación básica* con números naturales pertenecientes al conjunto $\mathbb{N}$? ¿Por qué?

2. *a*) Sumar:

    1) $4 + 2 + 6 = \dots\dots\dots$
    2) $(4 + 2) + 6 = \dots\dots\dots$
    3) $4 + (2 + 6) = \dots\dots\dots$

   b) Los resultados: ¿Pertenecen al conjunto $\mathbb{N}$? ¿Qué propiedad de la suma de números naturales los generaliza?

   c) ¿Qué propiedad de la suma de números naturales explica la relación entre los resultados obtenidos en $2a1$, $2a2$ y $2a3$?

3. ¿Cuál es la operación inversa de la suma?

   a) Completar:

   Si $8 + 4 = 12 \Rightarrow \begin{cases} 8 & = \dots\dots - \dots\dots \\ 4 & = \dots\dots - \dots\dots \end{cases}$

   donde la flecha hacia la derecha con trazo de doble línea significa *implica* o *entonces*, lo que quiere decir que la primera afirmación implica, deriva o trae como consecuencia la segunda.

   b) ¿Se ajusta a lo indicado en el Ej. 1?

4.

   a) Sumar:

    1) $7 + 2 = \dots\dots\dots$
    2) $2 + 7 = \dots\dots\dots$

   b) Repetir los puntos $2b$ y $2c$ del Ej. 2.

5. *a*) Restar:

    1) $8 - 4 = \dots\dots\dots$
    2) $4 - 8 = \dots\dots\dots$

   b) ¿Poseen las mismas propiedades observadas en $4a1$ y $4a2$?

6. Restar $4 - 4 = \dots\dots\dots$

   a) ¿Cumple con las propiedades observadas en el Ejercicio 5 en el conjunto $\mathbb{N}$?

   b) Si no lo hiciera: ¿A qué conjunto numérico pertenece el resultado?

7. ¿Cómo surge la operación *producto* o *multiplicación* a partir de la suma? ¿Está de acuerdo con lo observado en el Ej. 1? Ejemplificarlo mediante sucesivas aplicaciones de la operación suma para los dos casos siguientes:

$$5 \cdot 3 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$3 \cdot 5 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

8.

   a) Multiplicar:

    1) $4 \cdot 2 \cdot 6 = \dots\dots\dots$
    2) $(4 \cdot 2) \cdot 6 = \dots\dots\dots$
    3) $4 \cdot (2 \cdot 6) = \dots\dots\dots$

   b) Repetir los puntos $2b$ y $2c$ para el producto de números naturales.

9.

   a) Multiplicar:

      1) $7 \cdot 2 = \dots\dots\dots$
      2) $2 \cdot 7 = \dots\dots\dots$

   b) Repetir $2b$ y $2c$.

10.

   a) Efectuar las siguientes operaciones:

      1) $2 \cdot (3 + 5) = \dots\dots\dots$
      2) $2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = \dots\dots\dots$

   b) ¿A qué propiedad hacen alusión los resultados obtenidos?

11.

   a) Efectuar las siguientes operaciones:

      1) $2 \cdot (3 + 5) = \dots\dots\dots$
      2) $2 \cdot 3 + 5 = \dots\dots\dots$

   b) ¿Es importante la presencia de los paréntesis en $11a1$, si lo que se quiere es aplicar la propiedad indicada en $10b$?

12.

   a) Efectuar las siguientes operaciones:

      1) $2 \cdot (7 - 4) = \dots\dots\dots$
      2) $2 \cdot 7 - 2 \cdot 4 = \dots\dots\dots$

   b) ¿A qué propiedad hacen alusión los resultados obtenidos? ¿El resultado pertenece a $\mathbb{N}_0$?

   c) Efectuar las siguientes operaciones:

      1) $2 \cdot (4 - 7) = \dots\dots\dots$
      2) $2 \cdot 4 - 2 \cdot 7 = \dots\dots\dots$
         ¿El resultado pertenece a $\mathbb{N}_0$?

13.

   a) Efectuar las siguientes operaciones:

      1) $2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = \dots\dots\dots$
      2) $2 \cdot (3 + 6 + 4 - 5) = \dots\dots\dots$

   b) ¿Qué se aplica para explicar la igualdad de los dos resultados? ¿A qué propiedad hacen alusión los resultados obtenidos?

14. Resolver la siguiente operación de dos maneras diferentes:

   a) Resolviendo cada paréntesis por separado, para luego efectuar el producto.

   b) Aplicando la propiedad distributiva.

   $(5 + 2) \cdot (2 + 7) = \dots\dots\dots$

   Explicar en palabras el procedimiento seguido en forma escrita, indicando las propiedades utilizadas para realizar la operación.

15. Utilizando las propiedades de los números naturales que se fueron deduciendo mediante los ejercicios anteriores y que se explican en la teoría complementaria, efectuar una operación igual a la del ejercicio anterior, reemplazando los números por letras para generalizar, y obtener, para cada caso, una expresión que contenga el menor número de términos posibles — *sumando o restando los términos de igual parte literal* — sin utilizar la operación potenciación, teniendo presente que a, b, c y d son números pertenecientes al conjunto $\mathbb{N}$.

    a) $(a + b) \cdot (c + d) = \dots\dots\dots$

    b) $(a + b) \cdot (a + b) = \dots\dots\dots$

    c) $(a - b) \cdot (a - b) = \dots\dots\dots$

    ¿Es necesario imponer la condición $a > b$ para que el resultado pertenezca a $\mathbb{N}$?

    d) $(a + b) \cdot (a - b) = \dots\dots\dots$ *(siendo $a > b$)*

    Explicar el procedimiento seguido en cada caso, indicando las propiedades utilizadas para realizar la operatoria.

16. La *división* o *cociente* es la operación inversa de la multiplicación.

    a) Completar:

$$8 \cdot 4 = 32 \Rightarrow \begin{cases} 8 & = \dots\dots\dots : \dots\dots\dots \\ 4 & = \dots\dots\dots : \dots\dots\dots \end{cases}$$

    a) ¿Se ajusta a lo observado en el Ej. 1?

    b) ¿Qué significado se le puede dar a esta operación expresado en palabras?

17.

    a) Si divido:

$$8 : 4 = \dots\dots\dots$$

    ¿El resultado $\in \mathbb{N}$?

    b) Si divido:

$$4 : 8 = \dots\dots\dots$$

    ¿El resultado $\in \mathbb{N}$?

    c) Extraer conclusiones.

18. Si divido $8 : 4 = \dots\dots\dots$

    a) ¿El resultado $\in \mathbb{N}$?

    b) ¿Por qué se dice que 8 dividido 4 es una división exacta?

    c) Si divido $9 : 4$

        1) ¿El resultado $\in \mathbb{N}$?

        2) ¿Es una división exacta?

19. Resolver:

    a)

        1) $36 : 6 : 3 = \dots\dots\dots$

        2) $(36 : 6) : 3 = \dots\dots\dots$

        3) $36 : (6 : 3) = \dots\dots\dots$

    Extraer conclusiones.

b)

1) $36 : 6 = \ldots\ldots\ldots$
2) $6 : 36 = \ldots\ldots\ldots$

Extraer conclusiones.

20. Resolver $19 : 5$ expresando el resultado como:

$$19 = 5 \cdot q + r$$

donde q es el *cociente* de la división y r es el *resto*[1].

21. ¿Cómo surge la operación *potenciación* a partir de la multiplicación? Ejemplificarlo con:

$$2^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Indicar cómo se denomina a los números naturales 2 y 5 en esta operación. ¿El resultado pertenece a $\mathbb{N}$?

22.

a) Realizar las siguientes operaciones de potenciación de números naturales:

$$3^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$4^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

b) Repetir 2*b* y 2*c* para el caso de potenciación.

23. Reescribir los resultados finales de los tres casos del Ej. 15 utilizando la operación de potenciación. Enunciar en palabras el resultado obtenido para los puntos 15*b*, 15*d* y 15*c* e indicar como se denomina normalmente a las expresiones obtenidas.

24. Dada la operación $10^2 = 100$:

Indicar cuáles son las operaciones inversas de la potenciación para[2]:

a) Obtener el número natural 10 a partir del 100 y el 2.
b) Obtener el número natural 2 a partir del 100 y del 10.

25. Repetir el ejercicio anterior, para $4^2 = 16$ a los efectos de[3]:

a) Obtener el número natural 4 a partir del 16 y del 2.
b) Obtener el número natural 2 a partir del 16 y del 4.

¿Las operaciones definidas se podrán realizar dentro del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, cualesquiera sean esos números? *Justificar*.

26. Utilizando las propiedades de las operaciones básicas sobre números naturales, realizar los siguientes cálculos mentalmente indicando en forma escrita, debajo de cada uno de los ítems, la estrategia elegida para simplificar el mismo, así como también la o las propiedades utilizadas para conseguirlo.

a) $234 \cdot 5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
b) $34 \cdot 50 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

[1] En este ejercicio se utiliza el Algoritmo de División que se presenta en la sección de Teoría Complementaria del Capítulo 3, correspondiente a números enteros.

[2] Los temas necesarios para comprender cabalmente la problemática planteada en este ejercicio se tratarán con profundidad en la Teoría Complementaria del capítulo de Números Reales.

[3] Los temas necesarios para comprender cabalmente la problemática planteada en este ejercicio se tratarán con profundidad en la Teoría Complementaria del capítulo de Números Reales.

c) $12 + 13 + 28 + 37 + 10 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

d) $23 \cdot 5 + 34 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

e) $14 + 21 + 36 + 29 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

f) $17 \cdot 4 + 32 \cdot 4 + 7 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

27. Indicar cuáles de las operaciones definidas son *cerradas* en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.

28. Decidir si las siguientes magnitudes son números naturales. En caso de serlo, determinar si la misma pertenece a $\mathbb{N}$ o a $\mathbb{N}_0$, según corresponda.

    a) El perímetro de un cuadrado de lado $l = 1$.

    b) El largo, expresado en metros de una mesa de 1 metro con 80 centímetros de largo.

    c) El largo, expresado en centímetros, de una mesa de 1 metro con 80 centímetros de largo.

    d) La cantidad de patas de un caballo de carrera.

    e) La cantidad de pelos que tiene usted en la cabeza.

    f) La diagonal de un cuadrado de lado $l = 1$.

    g) El diámetro de una circunferencia de radio $r = 1$.

    h) El perímetro de una circunferencia de radio $r = 1$.

29. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

    a) Hay un número natural n, que es el último de todos, luego del cual no existe otro número natural.

    b) La afirmación anterior es falsa.

    c) El número 1 no tiene un predecesor en $\mathbb{N}$.

    d) El número 1 no tiene un predecesor en $\mathbb{N}_0$.

    e) La propiedad que afirma que entre dos números naturales cualesquiera hay tan sólo una cantidad finita de otros números naturales, indica que $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}_0$ son conjuntos discretos.

30. Efectuar las siguientes operaciones en el campo de los números naturales. Decidir si el resultado pertenece a $\mathbb{N}$ o a $\mathbb{N}_0$, según corresponda.

    a) $2 + 3\,(a + 1) - 5b + c = \ldots \leftarrow$ donde $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$.

2.3. Problemas

Para asentar los conceptos construidos al resolver los ejercicios planteados en el punto anterior, sobre números naturales, los aplicaremos a las siguientes situaciones problemáticas. Indicar en cada caso si el resultado es o no un número natural.

Recordar que en cada problema se debe explicar en palabras en forma escrita la manera de abordar el planteo y cada paso del procedimiento utilizado para resolverlo, justificandolos. Análogamente debe poder realizarse la explicación mediante uso del lenguaje en forma oral.

1. Aníbal quiere alfombrar su habitación, que mide 10 metros de largo por 5 metros de ancho. El metro cuadrado de alfombra cuesta \$24. ¿Cuántos dinero debe destinar a la refacción?

2. Una canilla descompuesta gotea a razón de 4 gotas por segundo, y desperdicia una cantidad de agua potable de 1ml por gota. Calcular cuánta agua potable se desperdiciaría en 1 hora. ¿Cuánta en un día? ¿Cuánta en un mes? ¿Y en un año?

3. Aníbal tiene que atravesar un terreno baldío de 100 metros de ancho por 300 metros de largo. Tiene dos formas de cruzarlo, en L o en diagonal. ¿Cuántos metros caminaría para cruzarlo en L? ¿Y si lo hace en diagonal? ¿Cuál forma es más conveniente? ¿En ambas formas de hacerlo el resultado es un número natural?

4. Si la luz viaja a razón de 300,000Km/s aproximadamente y la distancia al Sol es de unos 150,000,000km. ¿Cuántos minutos le lleva a la luz que emite el sol llegar a la Tierra? ¿La respuesta es un número natural?

2.4. Teoría Complementaria

Ya dijimos previamente que los números naturales son aquellos utilizados para contar la cantidad de elementos de ciertos conjuntos. Entre las operaciones básicas que pueden realizarse dentro del conjunto de números naturales están la suma y el producto usuales. Las propiedades básicas que caracterizan estas operaciones son las siguientes.

2.4.1. Propiedades de los números naturales

El conjunto de números naturales posee las siguientes características:

1. *Es un conjunto ordenado:* Es decir, hay definida una relación de orden "$<$" — *se lee "menor"* — que nos permite ordenar o disponer los diferentes números naturales sobre una recta numérica, que a su vez nos permite representarlos.

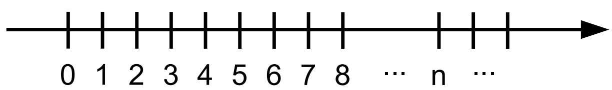
   Por ejemplo, dados los siguientes números naturales:

   $$19 \quad 37 \quad 23 \quad 45 \quad 12 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 28$$

   podríamos ordenarlos según:

   $$5 < 7 < 9 < 11 < 12 < 19 < 23 < 28 < 37 < 45$$

   Figura 2.4.1: Representación de $\mathbb{N}_0$ sobre una Recta Numérica

   Una recta trazada sobre la hoja — *que denominaremos recta numérica* — es el lugar ideal para representar ciertos conjuntos numéricos, como ser por ejemplo $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}_0$. En la Fig. 2.4.1 puede encontrarse una representación de $\mathbb{N}_0$, donde puede apreciarse la importancia de la relación de orden "$<$", donde los números a la izquierda son menores que aquellos que se sitúan a la derecha.

   En la figura 2.4.1 puede apreciarse una representación del conjunto $\mathbb{N}_0$ sobre una recta numérica. Los números situados a la izquierda son siempre menores que aquellos que se sitúan a la derecha. El primer elemento es el número 0 y la punta de la flecha indica el sentido en que crecen los números naturales. La distancia que separa dos números naturales consecutivos es siempre la misma, y normalmente la consideramos como una unidad. A partir del gráfico podemos comprobar que entre dos cualesquiera números naturales, siempre hay a lo sumo una cantidad finita de otros números naturales.

   Observación. Si quisiéramos indicar todos los números naturales comprendidos entre el número 5 y el número 9 sin incluir a estos, lo haríamos por comprensión definiendo el siguiente conjunto:

   $$A = \{n \in \mathbb{N} / 5 < n < 9\} = \{6,\ 7,\ 8\}$$

   donde para clarificar también hemos descripto al conjunto A por extensión.

Por el contrario, si quisiéramos incluir los bordes dentro del conjunto que estamos definiendo, lo haríamos del siguiente modo:

$$B = \{n \in \mathbb{N}/5 \leq n \leq 9\} = \{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$$

También podríamos querer incluir uno sólo de los bordes, por ejemplo el 9, lo que haríamos de la siguiente forma:

$$C = \{n \in \mathbb{N}/5 < n \leq 9\} = \{6,\ 7,\ 8,\ 9\}$$

El símbolo "≤" se lee como "*menor o igual*" y su utilización es la explicada en los ejemplos anteriores. Análogamente para "≥", que se lee como "*mayor o igual*".

Para que se comprenda mejor, se ha indicado también

2. *Hay un primer elemento:* a saber el 1 en $\mathbb{N}$ y el 0 en $\mathbb{N}_0$.

3. *Sucesor:* Todo número natural a tiene un inmediato sucesor, a saber: $b = a + 1$.

4. *Predecesor:* Todo número natural $a > 1$ tiene un inmediato antecesor, a saber $b = a - 1$.

5. *Es un conjunto discreto:* Es decir entre dos números $a < b$, hay una cantidad finita de otros números naturales.

   a) En efecto, por ejemplo comprendidos entre 4 y 9, tan sólo están los números 5, 6, 7 y 8.

6. *Es un conjunto infinito:* El conjunto $\mathbb{N}$ es infinito, es decir hay infinitos números naturales.

7. *Elemento neutro para la suma:* En el conjunto $\mathbb{N}_0$, cuando sumamos o restamos 0 a cualquier número a, nos da como resultado el mismo número a. En símbolos esto es $a + 0 = a$ para todo $a \in \mathbb{N}_0$. Por este motivo al número 0 se lo llama *elemento neutro de la suma* o *elemento neutro aditivo — obviamente vale lo mismo para la resta*.

8. *Elemento neutro para el producto:* En los conjuntos $\mathbb{N}$ o $\mathbb{N}_0$, cuando multiplicamos o dividimos por el número 1 a un número cualquiera a, nos da como resultado el mismo número a. En símbolos esto es $a \cdot 1 = a$ o $\frac{a}{1} = a$ para todo $a \in \mathbb{N}_0$. Por este motivo al número 1 se lo llama *elemento neutro del producto* o *neutro multiplicativo*.

2.4.2. Propiedades de las relaciones de igualdad y orden

Las relaciones de *igualdad* y *orden* tienen algunas propiedades que sería importante destacar, y las enumeraremos a continuación.

2.4.2.1. Igualdad

1. Si sumamos un mismo número a ambos miembros de una igualdad, la igualdad se mantiene. Por ejemplo:

   $$2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow 2 \cdot 3 + 5 = 6 + 5$$

   y en forma más general:

   $$2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow 2 \cdot 3 + a = 6 + a$$

   para cualquier número natural a.

2. Análogamente ocurre para la resta, multiplicación, división o cualquier otra operación que se aplique simultáneamente a ambos miembros de una igualdad, teniendo en cuenta que en los casos de la suma y el producto el resultado obtenido en cada miembro seguirá siendo un número natural, en tanto que en el caso de restar o dividir o aplicar otra operación el resultado puede no pertenecer al conjunto de los números naturales.

Ahora estamos en condiciones de justificar de manera muy simple que a partir de la operación básica *suma* es posible construir todas las operaciones que hemos definido.

Por ejemplo para la resta en la definición 2.1.6 establecimos que "*$a - b = c$ si y sólo si $a = b + c$*".

Si en la igualdad $a - b = c$ sumamos a ambos miembros el número b, resulta:

$$(a - b) + b = c + b$$

Si aplicamos las propiedades conmutativa y asociativa entre el número b que está restando y el número b que está sumando en el primer miembro, y también conmutamos c con b en el segundo miembro, resulta:

$$a + (b - b) = b + c$$

Como $b - b$ es el elemento neutro 0 en $\mathbb{N}_0$, entonces:

$$a = b + c$$

Lo dicho nos permite indicar claramente el significado del *pasaje de miembro* de un número que está restando en uno de los miembros al otro miembro como sumando e inversamente un número que está sumando en un miembro al otro miembro restando.

Análogamente se razonará para pasar un número que está multiplicando en un miembro como divisor del otro y viceversa un número que está dividiendo en un miembro como multiplicando en el otro miembro.

2.4.2.2. Orden

Sólo dentro del conjunto de los números naturales, las propiedades indicadas para la igualdad son también válidas para cualquiera de las relaciones de orden. En los próximos capítulos se verá que esto último no siempre es así en otros conjuntos numéricos.

2.4.3. Propiedades de las operaciones con números naturales

1. *La suma es cerrada en $\mathbb{N}$:* Para todo par de números naturales a y b, la suma $a+b$ es a su vez un número natural. Esta propiedad enuncia que la suma de dos números naturales, da como resultado a su vez un número natural.

2. *La suma es conmutativa:* Es decir $a + b = b + a$ para todo par de números naturales a y b.

3. *La suma es asociativa:* Es decir $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$.

4. *Existencia de un elemento neutro para la suma*[4]*:* En el caso de $\mathbb{N}_0$, existe un número destacado, a saber el 0, con la propiedad de que $a + 0 = 0 + a = a$ para todo $a \in \mathbb{N}$.

5. *El producto es cerrado en $\mathbb{N}$:* Para todo par de números naturales a y b, el producto ab es a su vez un número natural.

6. *El producto es conmutativo:* Es decir $ab = ba$ para todo par de números $a, b \in \mathbb{N}$.

7. *El producto es asociativo:* Es decir $a\,(bc) = (ab)\,c$ para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$.

8. *Existencia de un elemento neutro para la multiplicación:* Existe un número destacado, a saber el 1, con la propiedad de que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para todo $a \in \mathbb{N}$.

[4]Esta propiedad se verifica solamente en $\mathbb{N}_0$, ya que $\mathbb{N}$ comienza en el número $n = 1$, y por lo tanto carece de un elemento neutro para la suma.

9. *Propiedad Distributiva del Producto con respecto a la Suma:* $a\,(b + c) = ab + ac$ para todo $a,\ b,\ c, \in \mathbb{N}$.

   Observemos que esta propiedad nos autoriza a *extraer factores comunes*, pues:

   $$ab + ac = a \cdot (b + c)$$

   en virtud de que las igualdades pueden ser leídas en cualquiera de los dos sentidos posibles, es decir $A = B$ si y sólo si $B = A$.

10. *Propiedades de la Potenciación de Números Naturales:* Las propiedades básicas de la potenciación de números naturales, a^n donde a se denomina *base* y n *exponente* — *que luego se extenderán para todos los conjuntos numéricos* — son:

    a) $a^1 = a$

    El *enunciado en palabras* sería: "Todo número natural a elevado a la unidad es igual a dicho número".

    b) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

    El *enunciado* sería: "El producto de dos potencias de igual base es igual a otra potencia de la misma base cuyo exponente es la suma de los dos exponentes".

    c) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

    El *enunciado* sería: "Una potencia elevada a otro exponente es igual a una potencia de igual base cuyo exponente es el producto de los exponentes".

    De estas tres propiedades se pueden deducir otras. Una de las más importantes es la que permite establecer que para todo número natural a del conjunto $\mathbb{N}$ — *notar que expresamente excluimos al* 0 — elevado al número 0, da como resultado la unidad. La demostración resulta inmediata, teniendo en cuenta las propiedades anteriores y la operación de suma:

    $$a = a^1 = a^{1+0} = a^1 \cdot a^0 = a \cdot a^0$$

    y como $a \neq 0$ por ser un número natural del conjunto $\mathbb{N}$, entonces podemos simplificar a en ambos miembros para obtener la propiedad:

    $$\begin{aligned} \cancel{a} &= \cancel{a} \cdot a^0 \\ a^0 &= 1 \end{aligned}$$

    Simbólicamente: $a^0 = 1\ \forall\, a \in \mathbb{N}$, donde el símbolo $\forall$ se lee *para todo*.

2.4.4. Estrategias para realizar cálculos mentalmente

A pesar de que actualmente siempre disponemos a mano de una calculadora, la realización de cálculos mentales sencillos es fundamental en la vida diaria y es absolutamente necesaria en el campo de la ingeniería. El ingeniero debe disponer de herramientas de razonamiento y cálculo mental que le permitan abordar en forma intuitiva ciertos problemas que se le suscitan así como también tener la posibilidad de chequear si los resultados obtenidos computacionalmente son compatibles con los requerimientos de la problemática planteada. Se debe tener en cuenta, por ejemplo, que en todo programa de simulación existen parámetros que deben ajustarse para lograr que el error en los resultados obtenidos sea admisible por el sistema real que se desea representar, y esto último requiere en forma indispensable que el ingeniero disponga de facilidad de cálculo mental para que no se le escape un posible error causado por la máquina por problemas de ajustes de parámetros al realizar la simulación.

Las propiedades válidas para números naturales enumeradas en la sección anterior son de gran utilidad a los efectos de realizar más eficientemente cálculos mentalmente. A continuación se verán algunos ejemplos:

- Para efectuar la operación:

$$102 \cdot 45$$

se puede utilizar la propiedad distributiva para poder proceder de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 102 \cdot 45 &= (100 + 2) \cdot 45 \\ &= 100 \cdot 45 + 2 \cdot 45 \\ &= 4500 + 90 \\ &= 4590 \end{aligned}$$

El procedimiento descripto en los pasos anteriores bien podría haberse implementado mentalmente como estrategia para agilizar el cálculo original, aprovechando la Propiedad Distributiva de la suma con respecto al producto.

- Otro ejemplo similar al primero:

$$\begin{aligned} 12 \cdot 35 &= (10 + 2) \cdot 35 \\ &= 10 \cdot 35 + 2 \cdot 35 \\ &= 350 + 70 \\ &= 420 \end{aligned}$$

- Otro ejemplo de este tipo:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 31 &= 5 \cdot (30 + 1) \\ &= 5 \cdot 30 + 5 \cdot 1 \\ &= 150 + 5 \\ &= 155 \end{aligned}$$

- Supongamos ahora que quisiéramos efectuar la siguiente suma de varios números naturales:

$$23 + 12 + 17 + 9 + 8 =$$

Aprovechando la Asociatividad y la Conmutatividad de la suma podríamos reordenar los términos de la suma, agrupándolos de tal forma que las operaciones parciales a realizar para ir obteniendo el resultado definitivo, sean más fáciles de realizar o bien den como resultado números más sencillos de sumar entre sí. Concretamente haríamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 23 + 12 + 17 + 9 + 8 &= (23 + 17) + (12 + 8) + 9 \\ &= 40 + 20 + 9 \\ &= 69 \end{aligned}$$

Como podemos ver, los resultados parciales luego de la reordenación de los términos a sumar, dan como resultado números fácilmente sumables entre si, y simples de manejar mentalmente.

2.4.5. Sistemas de Numeración Posicional

Para representar los números naturales del conjunto $\mathbb{N}_0$ disponemos de *diez símbolos distintos*:

$$0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4 \qquad 5 \qquad 6 \qquad 7 \qquad 8 \qquad 9$$

Como hay más números que los diez símbolos que se utilizan normalmente, hubo que buscar históricamente la manera de combinarlos para representar los números siguientes y todo número natural que podamos imaginar con nuestra mente, por más grande que sea.

De acuerdo a las propiedades vistas previamente, todo número natural n tiene un sucesor que llamamos $n + 1$. Por lo tanto, luego del número 9 vendrá, dentro de $\mathbb{N}_0$, el número $9 + 1$, que no posee un único símbolo para su representación. Por este motivo se pensó en combinar los símbolos disponibles y en el caso particular del $9 + 1$ que es el menor natural que exige una combinación se vinculó los dos símbolos de menor valor, el 0 y el 1. Se pensó en combinar los símbolos de menor valor poniéndolos uno al lado del otro. El número $9 + 1$ podría representarse en este caso como 01 o 10. Evidentemente como leemos de izquierda a derecha y el 0 representa el valor nulo, se eligió 10 para su representación. A ese nuevo número que surge de la combinación del 1 y el 0 y tiene un valor $9 + 1$ se lo llamó *diez*.

Para continuar con el número que sigue, es decir $10+1$, no resulta tan complicado pues podemos utilizar el símbolo inmediato al 0 y representarlo como $10 + 1 = 11$, y así sucesivamente:

$$11 + 1 = 12 \qquad 12 + 1 = 13 \qquad \cdots 18 + 1 = 19$$

Una vez que agotamos nuevamente los símbolos básicos, tampoco resulta complicado darse cuenta que una alternativa para representar $19 + 1$ puede ser cambiar el 1 de la izquierda por un 2, que es el símbolo que sigue, y volver a empezar desde 0 en el símbolo más a la derecha. De esta forma podríamos representar $19 + 1 = 20$.

El esquema planteado permite representar todos los números hasta el 99, donde nuevamente agotamos las posibles combinaciones utilizando dos dígitos. Pero sabemos que existe un número que es el sucesor inmediato de 99 y por lo tanto tendremos que encontrar una manera de representarlo también. Podemos proceder análogamente a como hicimos al principio para pasar del 9 al $9 + 1 = 10$, con lo que sería natural escribir $99 + 1 = 100$, donde el nuevo número lo formamos mediante el 1 y dos ceros en forma similar a lo que se hizo con $9 + 1 = 10$.

Como hay infinitos números naturales entonces el procedimiento no tiene fin, pero sabemos que siempre que hayamos agotado los números representables mediante una cantidad finita de números 9, al sumarle 1 formamos un nuevo número tiene un 1 a la izquierda y tantos ceros como nueves había a la derecha. Por ejemplo si queremos representar al sucesor inmediato de 9999 haríamos $9999 + 1 = 10000$. De esta manera vamos ampliando sucesivamente la cantidad de dígitos a medida que los vamos necesitando, y este recurso constituye la esencia de lo que denominaremos *Sistema de Numeración Posicional*.

Para comprender el significado de la *posición de cada dígito* basta ver que por ejemplo, un número cualquiera como ser el 7465, lo podríamos obtener mediante una suma de la siguiente forma:

$$7000 + 400 + 60 + 5$$

De inmediato, teniendo en cuenta la operación multiplicación, la suma anterior la podemos escribir como:

$$7 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 5 \cdot 1$$

En este caso *se puede ver de inmediato* que de acuerdo con la posición de cada uno de los posibles dígitos conformados por un único símbolo de los diez posibles, cada uno tiene un *peso* de un 1 seguido de tantos ceros como el lugar que ocupa, comenzando a contar desde la derecha hacia la izquierda, en donde el de más a la derecha tiene peso 1, el que le sigue hacia la izquierda peso 10, el que le sigue hacia la izquierda peso 100, y así sucesivamente cada vez que nos corremos un dígito hacia la izquierda el peso de ese dígito en el número total se multiplica por 10.

Teniendo en cuenta la operación *potenciación* ya definida, observamos que $1000 = 10^3$; $100 = 10^2$; $10 = 10^1$; y $1 = 10^0$, por lo que en el ejemplo quedaría:

$$7465 = 7 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Por lo que si tenemos un número natural cualquier de 6 dígitos donde puede haber o no dígitos repetidos, el significado de ese número en un sistema posicional de base diez va a ser:

$$d_5d_4d_3d_2d_1d_0 = d_5 \cdot 10^5 + d_4 \cdot 10^4 + d_3 \cdot 10^3 + d_2 \cdot 10^2 + d_1 \cdot 10^1 + d_0 \cdot 10^0$$

donde cada uno de los dígitos d_i representa el valor del dígito número i comenzando desde la derecha, que puede representar cualquiera de los diez símbolos utilizados en el conjunto $\mathbb{N}_0$.

Como en los ejemplos vistos se tomó el peso de cada símbolo multiplicado por una potencia del número 10, donde el exponente representa la posición que ocupa el mismo, diremos que estamos utilizando un *Sistema de Numeración Posicional de Base* 10 o *Sistema de Numeración Decimal*.

El dígito más a la derecha que posee el menor *peso* — peso 1 — se denomina normalmente *Dígito de las Unidades*, dado que siempre será alguno de los diez símbolos utilizados en el sistema decimal. El dígito que le sigue inmediatamente hacia la izquierda, al tener un peso 10 recibe el nombre de *Dígito de las Decenas*, el siguiente hacia la derecha se denomina *Dígito de las Centenas*, el que le sigue *Dígito de las Unidades de Mil*, y luego seguirá el de la decena de miles, centena de miles, unidad de millón, decena de millón, y así sucesivamente.

Este es el sistema más utilizado por los seres humanos, y se debe a que tenemos diez dedos.

Sin embargo en otros casos conviene que el peso de la posición de cada símbolo sean potencias de números que no son 10, es decir se hablará de *Sistemas de Numeración Posicionales de Base b*, donde b es un número natural mayor o igual que 2. El número b se elige según convenga para facilitar las operaciones realizadas con distintos tipos de cálculo. En un sistema de numeración posicional el número de símbolos o dígitos distintos que se utilizan es igual al número b de la base. Por ejemplo en las computadoras digitales se utiliza un *Sistema de Numeración Posicional de Base* 2, en el cual hay sólo dos símbolos — 0 *y* 1 — y los restantes números se representan mediante esos dos dígitos, colocando uno al lado del otro de la misma manera que lo hecho para base 10, pero en este caso en base 2.

Por ejemplo el número:

$$10111001 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

La numeración en base 2 es la más utilizada en los sistemas de cómputo dado que en la mayoría de los casos se utilizan para expresar un dígito en un dispositivo que funciona como un interruptor de luz, donde podemos interpretar el 0 cuando está cerrado y el 1 cuando está abierto, o viceversa según la convención y las necesidades.

En sistemas de cómputo aparte del sistema de numeración en base 2, suelen usarse los sistemas en base 8 y en base 16, que se denominan *binario*, *octal* y *hexadecimal* respectivamente.

En el *sistema de numeración de base* 8 se utilizan los mismos dígitos que en el sistema decimal, pero como sólo puede haber 8 símbolos distintos se utilizan los números del 0 al 7.

El número: $3425_8 = 3 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0$

Para indicar la base en que está escrito un número de varios dígitos en distintas posiciones se suele colocar a la derecha del mismo un subíndice indicando la base. Cuando no figura ningún subíndice, se entiende que el número está en base 10, salvo que por el contexto se comprenda que se está trabajando en otra base.

En el *sistema de numeración hexadecimal* se deberá contar con 16 símbolos distintos, por lo que los diez dígitos decimales no alcanzan para trabajar en esta base y habrá que agregar seis más. Normalmente éstos últimos suelen ser las primeras seis letras del abecedario escritas en mayúscula:

$$A, B, C, D, E, F$$

El número en hexadecimal:

$$3F2A_{16} = 3 \cdot 16^3 + F \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + A \cdot 16^0$$

Para determinar el valor que representa en base diez, que es la que usamos normalmente, un número que se encuentra expresado en una base distinta basta hacer la cuenta de la suma que se encuentra en el miembro de la derecha donde se expresó cada dígito por la base elevada a la potencia correspondiente de acuerdo a la posición.

De este modo:

$$\begin{aligned}
1011001_2 &= 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\
&= 128 + 32 + 16 + 8 + 1 = 185_{10} \\
3425_8 &= 3 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 729 + 64 + 16 + 5 = 814_{10}
\end{aligned}$$

Para poder pasar a base 10 un número escrito en una base $b > 10$ se debe reemplazar cada símbolo adicional creado a partir del número siguiente al 9 por su valor en decimal:

$$\begin{aligned}
3F2A_{16} &= 3 \cdot 16^3 + F \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + A \cdot 16^0 \\
&= 3 \cdot 16^3 + 15 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^0 \\
&= 4096 + 3840 + 32 + 10 \\
&= 7978_{10}
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Números Enteros $\mathbb{Z}$

3.1. Teoría Básica

Los números naturales fueron suficientes en la medida que la única necesidad que nos motive a concebir el concepto de número sea la de contar o enumerar los elementos de ciertos conjuntos. Con la aparición del trueque, el universo numérico tuvo que adaptarse para ser más versátil, y poder llevar un registro no sólo de cantidades que uno posee, sino por ejemplo de cantidades que uno debe. De esta forma surgen los números enteros, que están formados por los números naturales $\mathbb{N}$ más el 0 y los que denominaremos negativos, o lo que es lo mismo el conjunto de números naturales $\mathbb{N}_0$ más los negativos.

Definición 3.1.1. El conjunto de los números enteros lo designaremos con la letra $\mathbb{Z}$ y lo definiremos por extensión como:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots - m, \cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$$

Observemos que el conjunto de números naturales $\mathbb{N}_0$ estudiado en el capítulo anterior está incluido dentro del conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$, lo cual se indica simbólicamente como:

$$\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z}$$

que se lee "$\mathbb{N}_0$ *contenido en* $\mathbb{Z}$".

Los números enteros nos permiten representar por ejemplo las siguientes situaciones:

- Si debemos \$20 al almacenero, cuando llevamos nuestras cuentas por escrito, podemos designar esa deuda a partir del número entero "-20".
- Una empresa compra insumos para la producción de sillas metálicas, lo cual implica un gasto de \$5000. A tales efectos emite un pagaré por dicha suma a 30 días. Durante el mes se fabrican 100 sillas, las cuales se venden a razón de \$80 cada una, al final del mes. Con el dinero recaudado se cancela el pagaré inicial, y se vuelven a comprar insumos por la misma suma de dinero que el mes anterior, para lo cual se procede de la siguiente forma: con el dinero excedente de la ganancia de las ventas se cancela una parte de dichos insumos, y se emite un nuevo pagaré a 30 días por el resto del dinero. ¿Cuál es el importe del pagaré emitido? Para responder a esta pregunta, podemos realizar la siguiente cuenta en el campo de los números enteros $\mathbb{Z}$, indicando con signo positivo "+" el dinero que ingresa a la empresa y con signo negativo "−" al que sale para cubrir los pagarés por la cobra de insumos:

  $$-5000 + 80 \cdot 100 - 5000 = -2000$$

  Esto último indica que luego de abonar parte de los insumos con el dinero de la venta de las primeras sillas producidas, aún nos restan \$2000 para poder completar el pago de los nuevos insumos. De esta forma, el pagaré emitido debe ser por el importe de \$2000.

- El valor de un automóvil 0km es de \$64740. Como no dispone del monto para comprarlo al contado, Juan lo paga en 83 cuotas de \$920. Para calcular cuánto dinero le cuesta a Juan la financiación, por el hecho de comprar el automóvil en cuotas en lugar de haberlo comprado en efectivo, deberíamos hacer la siguiente cuenta dentro del conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$:

$$64740 - 920 \cdot 83 = -11620$$

Es decir Juan tuvo que gastar de más 11620 pesos por el hecho de financiar el valor del automóvil en cuotas.

3.1.1. Propiedades básicas generalizadas y adicionales que valen en $\mathbb{Z}$

1. *Existencia de un elemento neutro para la suma*: $0 + a = a + 0 = a \; \forall \, a \in \mathbb{Z}$ — donde el símbolo "$\forall$" se lee "*para todo*".

   a) A modo de ejemplo, si $a = +4$ entonces:

   $$0 + (+4) = +4 + 0 = +4$$

   b) Si $a = -4$ entonces:

   $$0 + (-4) = -4 + 0 = -4$$

2. *Existencia de inversos aditivos*: Para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe un número "$-a$"$\in \mathbb{Z}$ tal que $a + (-a) = 0$. Esto significa que "a" y "$-a$" son *números opuestos* y al número "$-a$" se lo suele denominar *inverso aditivo* de "a" y viceversa, cualquiera sea el signo de a.

   a) Por ejemplo, el opuesto de 3 es "-3", pues $3 + (-3) = 0$.
   b) El opuesto de "-7" es "$+7$", pues $(-7) + (+7) = 0$.

   Evidentemente en $\mathbb{N}$ o $\mathbb{N}_0$ no hay inversos aditivos.

   Dado que todo número entero positivo "$+a$" coincide con el número natural "a", en estos normalmente omitiremos indicar el signo positivo "+" al principio del número, salvo cuando no hacerlo implique algún tipo de ambigüedad.

3. *Existencia de un elemento neutro para el producto*: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \; \forall \, a \in \mathbb{Z}$.

4. *Regla de los signos*: Ahora que en nuestro conjunto numérico existen números que son positivos y números que son negativos, tiene sentido preguntarse cuándo el producto de dos números enteros "$a \cdot b$" es positivo, y cuándo es negativo. A tales efectos enunciaremos la llamada *regla de los signos* que tiene tres casos posibles, como sigue:

   a) El primer caso caracteriza cuándo un producto es positivo:

   $$a \cdot b > 0 \Leftrightarrow [a > 0 \;\wedge\; b > 0] \vee [a < 0 \;\wedge\; b < 0]$$

   donde la doble flecha con trazo de doble línea significa "*doble implicación*" e indica que la primera afirmación implica la segunda y viceversa, y se lee "*si y sólo si*".

   La expresión anterior se lee "el producto de a por b es mayor que cero *si y sólo si*: o bien a es mayor que cero y b es mayor que cero, o a es menor que cero y b es menor que cero".

   b) El segundo caso caracteriza cuándo un producto es negativo:

   $$a \cdot b < 0 \Leftrightarrow [a > 0 \;\wedge\; b < 0] \vee [a < 0 \;\wedge\; b > 0]$$

   que se lee "el producto de a por b es menor que cero *si y sólo si*: o bien a es mayor que cero y b es menor que cero, o a es menor que cero y b es mayor que cero.

c) El tercer caso caracteriza cuándo un producto es nulo:

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0 \vee a = b = 0$$

que se lee "el producto de a por b es igual a cero *si y sólo si*: a es igual a cero o b es igual a cero o ambos son cero".

5. *Valor absoluto de un número entero*: El valor absoluto de un número entero $a \in \mathbb{Z}$ se indica con el número "a" colocado entre dos barras verticales y se define según la siguiente regla:

   - Si el número a es mayor o igual a cero, entonces su valor absoluto es ese número, o sea: $|a| = a$.
   - Si el número a es menor que cero, entonces su valor absoluto se obtiene cambiando el signo de dicho número, lo que se hace anteponiendo un signo "−" al mismo: $|a| = -a$.

   Como se observa, para obtener $|a|$ hay dos condiciones, de acuerdo al signo de "a" y a la regla de los signos de la propiedad anterior, y se indica formalmente del siguiente modo:

$$|a| = \begin{cases} a & , \text{si } a \geq 0 \\ -a & , \text{si } a < 0 \end{cases}$$

   Al valor absoluto de un número entero a, el cual simbolizamos como $|a|$ también se lo suele llamar *modulo* de "a", y es evidente que siempre es un *número positivo* o *nulo*.

   a) Por ejemplo $|7| = 7$ pues el número 7 es un entero positivo.
   b) Otro ejemplo sería $|-7| = -(-7) = (-1) \cdot (-7) = 7$ pues al ser $-7 < 0$ la definición nos indica que antepongamos un signo menos al número -7, y el resultado da positivo en virtud de la regla de los signos.

3.2. Ejercicios

Para poder comprender mejor, a partir del uso, las propiedades enunciadas en el punto anterior, es conveniente realizar un conjunto de ejercicios, cuya resolución conviene ***hacerla en forma ordenada***, al igual que se sugirió en la sección de ejercicios del capítulo anterior. También se debe justificar con palabras los procedimientos realizados, indicando explícitamente aquellas propiedades que se hayan utilizado, de modo de poder conceptualizar las mismas. Cabe acotar que si bien normalmente la operatoria aritmética — *operaciones con números determinados* — se realiza utilizando una calculadora de bolsillo o bien una computadora, no hay que olvidar que el funcionamiento de estos elementos tecnológicos es posible debido a que previamente ingenieros, normalmente de la especialidad informática, han diseñado los algoritmos de cálculos que rigen el funcionamiento de las mismas, y para ello deben respetar estrictamente las propiedades utilizadas para que la máquina realice dichas operaciones, brindando resultados correctos.

1. Ordenar, en sentido creciente, representar gráficamente sobre una recta numérica, y calcular los opuestos y valores absolutos de los siguientes números enteros:

$$8,\ -6,\ -5,\ 3,\ -2,\ 4,\ -4,\ 0,\ 7$$

2. Representar gráficamente, y calcular los opuestos y valores absolutos de los siguientes números enteros:

$$-4,\ 6,\ -2,\ 1,\ -5,\ 0,\ 9$$

3. Sacar factor común en las expresiones:

   a) $3 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) =$
   b) $(-2) \cdot 12 + (-2) \cdot (-6) =$

c) $8 \cdot 5 + 8 =$

d) $(-3) \cdot (-2) + (-3) \cdot (-5) =$

4. Realizar las siguientes operaciones con números enteros:

   a) $(3 - 8) + [5 - (-2)] =$

   b) $5 - [6 - 2 - (1 - 8) - 3 + 6] + 5 =$

   c) $9:[6 : (-2)] =$

   d) $[(-2) \cdot 5 - (-3) \cdot 3] \cdot 2 =$

   e) $(5 + 3 \cdot 2 : 6 - 4) \cdot (4 : 2 - 3 + 6) : (7 - 8 : 2 - 2) \cdot 2 =$

   f) $[(17 - 15) \cdot 3 + (7 - 12) \cdot 2] : [(6 - 7) \cdot (12 - 23)] =$

5. Realizar las siguientes operaciones con números enteros:

   a) $(7 - 2 + 4) - (2 - 5) =$

   b) $1\text{-}(5 - 3 + 2) - [5 - (6 - 3 + 1) - 2] =$

   c) $-12 \cdot 3 + 18 : (-12 : 6 + 8) =$

6. Realizar las siguientes operaciones, sin efectuar previamente la suma dentro de los paréntesis, dejándolo expresado como suma de tres términos, dos de los cuales sean los cuadrados de 15 y 7, de acuerdo a lo visto en el capítulo de números naturales.

   a) $(15 + 7)^2 =$ . . . .

   b) $(7 + 15)^2 =$ . . . .
   Comparar y extraer conclusiones.

   c) $(15 - 7)^2 =$ . . . .

   d) $(7 - 15)^2 =$ . . . .
   Comparar y extraer conclusiones.

7. Realizar las siguientes operaciones, sin efectuar previamente la suma dentro de los paréntesis, dejándolo expresado como suma o diferencia de dos términos.

   a) $(7 - 15) \cdot (7 + 15) =$ . . . .

   b) $(15 - 7) \cdot (15 + 7) =$ . . . .
   Comparar y extraer conclusiones.

   c) $[22 - (-3)] \cdot [22 + (-3)] =$ . . . .

   d) $[(-3) - 22] \cdot [(-3) + 22] =$ . . . .
   Comparar y extraer conclusiones.

8. Indicar si el resultado de las siguientes operaciones pertenece o no al conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$, y calcularlo si es posible. En caso de no poder realizarse la operación dentro del conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, colocar "*NO es posible dentro del conjunto* $\mathbb{Z}$". Al resolver estas operaciones se debe hacer uso de una correcta escritura formal, de la misma forma que se hace cuando escribimos un programa en un lenguaje de programación, pues si no estuviera correctamente escrito, el intérprete o el compilador no podrá comprenderlo. Análogamente en matemática, si no se escribe con corrección formal se presta a malas interpretaciones, o aún peor, a obtener un resultado incorrecto.

   a) $\sqrt{4} =$ . . . .

   b) $\sqrt{(-4)} =$ . . . .

   c) $\sqrt[3]{8} =$ . . . .

   d) $\sqrt[3]{(-8)} =$ . . . .

e) $\sqrt{(4)^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

f) $\left(\sqrt{4}\right)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

g) $\sqrt{(-4)^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

h) $\left(\sqrt{(-4)}\right)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

i) $\sqrt[3]{(8)^3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

j) $\left(\sqrt[3]{8}\right)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

k) $\sqrt[3]{(-8)^3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

l) $\left(\sqrt[3]{(-8)}\right)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Analizar los resultados obtenidos y extraer conclusiones.

Obsérvese que aún cuando la radicación puede ser concebida como una de las operaciones inversas de la potenciación, en el conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$, debido a la presencia de números negativos, cuando el índice de la raíz es par no es indistinto el orden en que uno efectúa una raíz y una potencia. Por ejemplo $\sqrt{(-4)^2}$ no produce el mismo resultado que $\left(\sqrt{(-4)}\right)^2$, en tanto que sí lo hace $\sqrt[3]{(-8)^3}$ y $\left(\sqrt[3]{(-8)}\right)^3$. La justificación se verá en la sección de teoría complementaria de números reales.

9. ¿Qué es un número primo? Hacer una lista de los 10 primeros números enteros primos positivos.

10. ¿Qué significa que un número $a \in \mathbb{Z}$ sea divisible por un número $b \in \mathbb{Z}$? Luego responder las siguientes preguntas:

    a) ¿Es el número 200 divisible por 5?
    b) ¿Es el número -75 divisible por 3?
    c) ¿Es el número 78 divisible por -4?

11. Factorizar los siguientes números enteros: 215, -317, -222, 71, -358, 416 y -1024.

12. Encontrar el primer número primo superior a 1000.

13. ¿A qué se llama máximo común divisor entre dos números enteros a y b? ¿Y el mínimo común múltiplo? Calcular el mcd (a, b) y el mcm (a, b) para los siguientes pares de números. Decidir si a y b son o no son coprimos. Justificar.

    a) $a = 540$ y $b = 504$.
    b) $a = 1617$ y $b = 2475$.
    c) $a = 27$ y $b = 125$.
    d) $a = 31$ y $b = 17$.
    e) $a = 304$ y $b = 1083$.
    f) $a = -1617$ y $b = 2475$.

3.3. Problemas

La aplicación de los conceptos y conclusiones presentados a lo largo del capítulo a la resolución de problemas concretos es importante para poder conceptualizar los mismos. La resolución debe hacerse justificando los pasos y explicitando con palabras los razonamientos que se hagan.

En los problemas del 1 al 4 se trabaja la noción *diferencia*, y cómo utilizarla para establecer la cantidad de enteros comprendidos entre dos números enteros arbitrarios.

1. Un emperador romano nació en el año 63 a. C. y murió en el 14 D.C. ¿Cuántos años vivió?

2. Una bomba extrae el petróleo de un pozo a 975m de profundidad y lo eleva a un depósito situado a 48m de altura. ¿Qué nivel supera el petróleo?

3. ¿Qué diferencia de temperatura soporta una persona que pasa de la cámara de conservación de las verduras, que se encuentra a 4ºC, a la del pescado congelado, que está a -18ºC? ¿Y si pasara de la cámara del pescado a la de la verdura?

4. La temperatura del aire baja según se asciende en la atmósfera, a razón de 9ºC cada 300 metros. Si la temperatura al nivel del mar en un punto determinado es de 0°C, ¿a qué altura vuela un avión si la temperatura del aire es de -81ºC?

   Los problemas siguientes trabajan la noción de *división*, *cociente* y *resto*, que son necesarios para resolver problemas que impliquen repartos.

5. Una persona con una infección respiratoria concurre al médico y éste le indica que tome un antibiótico en comprimidos cada 8 horas durante 7 días, comenzando el día siguiente, a las cero horas.

   a) ¿Cuántos comprimidos por día deberá tomar?

   b) ¿A qué horas deberá tomar los comprimidos restantes de ese día?

   c) ¿Todos los días tomará los comprimidos de antibióticos en los mismos horarios? ¿Por qué?

   d) ¿Qué diferencia habría en el punto anterior si se le hubiera indicado tomar 5 comprimidos por día?

   e) Escribir todos los números de comprimidos por día que podría tomar si se pretende que los horarios en los cuales toma los mismos, no varíen de un día a otro. Indicar el significado de estos números respecto a las 24 horas del día. Justificar.

6. En un depósito hay 800 litros de agua. Por la parte superior un tubo vierte en el depósito 25 litros por minuto, y por la parte inferior por otro tubo salen 30 litros por minuto. ¿Cuántos litros de agua habrá en el depósito después de 15 minutos de funcionamiento?

7. ¿Cuántos chocolates habría que tener para que luego de repartirlos entre 25 niños, dándole a cada uno 3 chocolates, sobren 2?

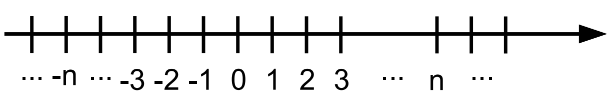
8. En una bolsa de feria hay una cierta cantidad $a \in \mathbb{Z}$ de naranjas. Si repartimos dichas naranjas entre 7 personas, sobrarían 3 naranjas. Si hubiéramos repartido las naranjas entre 5 personas, hubieran sobrado 4. ¿Cuántas naranjas había en la bolsa de feria, si se sabe que el número de naranjas era superior a 30 e inferior a 70? ¿Es única la solución? Si no hubiéramos impuesto la condición sobre que la cantidad de naranjas era superior a 30 e inferior a 70: ¿Sería única la solución?

3.4. Teoría Complementaria

3.4.1. Recta numérica de los números enteros $\mathbb{Z}$

Los números enteros $\mathbb{Z}$ admiten — *al igual que los números naturales* — una representación en la recta numérica, sólo que en dicha representación podemos apreciar que no hay un primer elemento, ya que hay números enteros tanto a la derecha como a la izquierda del número 0 — *ver figura a continuación*.

Figura 3.4.1: Representación de $\mathbb{Z}$ sobre una Recta Numérica



Debido a que el conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$ es un conjunto ordenado pero a diferencia del conjunto de números naturales, en $\mathbb{Z}$ no hay un primer elemento, entonces aparece la necesidad de elegir un cierto número cualquiera que nos sirva como punto de referencia para ubicar en él lo que llamaremos el *origen* de la representación sobre dicha recta. Los números mayores que dicho número tomado como referencia se ubicarán a la derecha del mismo, mientras que los inferiores lo harán a su izquierda. Por ejemplo, si tomáramos el número -2 como referencia, en este caso el número 0 — *neutro de la suma* — se ubicaría a la derecha del número tomado como referencia.

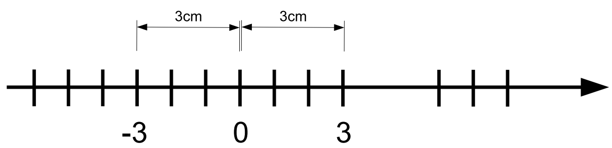
La punta de flecha que se ubica a la derecha de la recta numérica indica el sentido en que crecen los números enteros.

Observemos el papel que desempeña el número 0 en esta recta numérica:

- A la derecha se encuentran todos los números enteros positivos, aumentando su valor absoluto en el sentido de la flecha.
- A la izquierda se encuentran todos los números enteros negativos, aumentando su valor absoluto en el sentido opuesto de la flecha.

Por este motivo es común — *pero no necesario* — tomar al número cero como origen de la recta numérica en $\mathbb{Z}$. De este modo podemos comprobar visualmente en la figura que sigue el significado del opuesto aditivo, el cual es un número que se ubica en la mencionada recta numérica en un lugar simétrico con respecto al número cero que hemos tomado como origen o punto central. Evidentemente la longitud del segmento comprendido entre el número cero y un número entero positivo cualquiera es la misma que la longitud del segmento comprendido entre el opuesto aditivo de dicho número y el número cero, como puede también comprobarse en la figura.

Figura 3.4.2: ORIGEN DE LA RECTA NUMÉRICA$\mathbb{Z}$



3.4.2. Regla de los signos

A lo largo de esta sección utilizaremos letras como a y b para referirnos a números enteros arbitrarios. La utilización de estas letras es importante para poder generalizar y formalizar las propiedades. Por ejemplo, intuitivamente sabemos que si a un número entero concreto lo elevamos al cuadrado, el resultado de dicha operación es un número mayor o igual que cero. En este sentido podríamos decir que $(-3)^2 \geq 0$, o bien que $(-5)^2 \geq 0$ o bien que $7^2 \geq 0$. Pero estos tres casos no alcanzan para justificar una propiedad en forma general. Sin embargo, si escribimos $a^2 \geq 0$ para todo número entero a, entonces de esta manera sí estaríamos enunciando que la propiedad es válida para todo número entero posible.

En la teoría básica mencionamos la *regla de los signos*, que nos indica el signo del número obtenido al multiplicar cualquier par de números enteros a y b. En la misma habíamos anticipado que si a y b tienen el mismo signo, entonces su producto es positivo, mientras que si a y b tienen signos opuestos, su producto será un número negativo.

En esta sección justificaremos la mencionada *regla de los signos* en base a una argumentación que utilice las propiedades enunciadas previamente de los números enteros.

Para empezar recordemos que habíamos llamado *opuesto* de un número entero $a \in \mathbb{Z}$ al número "$-a$", el cual goza de la siguiente propiedad:

$$a + (-a) = 0 \, \forall \, a \in \mathbb{Z}$$

Es muy sencillo comprobar que el opuesto de un número positivo debe ser un número negativo, y viceversa. Por ejemplo:

$$3 + (-3) = 0$$
$$(-5) + (+5) = 0$$

A continuación demostraremos que si $a \in \mathbb{Z}$, entonces podemos obtener el *opuesto* de a — *es decir "$-a$"* — multiplicando al número entero a por el número entero -1. En símbolos esto es:

$$(-a) = (-1) \cdot a$$

o sea, el opuesto del número a lo podemos obtener multiplicando dicho número por "-1".

En efecto, para justificar la propiedad anterior demostraremos que la suma entre "a" y "$(-1) \cdot a$" da el número 0 para cualquier número $a \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
(-1) \cdot a + a &= (-1) \cdot a + 1 \cdot a && \leftarrow \text{Sacando factor común"}a\text{"} \\
&= [(-1) + 1] \cdot a && \leftarrow \text{Dado que "1" y " } - 1\text{" son opuestos.} \\
&= 0 \cdot a \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, resulta:

$$(-1) \cdot a = -a \, \forall \, a \in \mathbb{Z}$$

Observemos además que como:

$$a + (-a) = 0$$

entonces:

$$a = -(-a)$$

es decir que el opuesto del opuesto de cualquier número entero a es el mismo número a — *debemos tener en cuenta que esta propiedad que acabamos de demostrar vale para todo número entero a cualquiera sea su signo*.

Ahora estamos en condiciones de justificar la *regla de los signos*, que lo haremos a partir de una serie de ejemplos con números concretos, para facilitar la comprensión de las propiedades involucradas en dicha justificación:

- Si dos número son positivos, es claro que el producto de los mismos también es un número positivo, pues por ejemplo:

  $$3 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 = 15$$

- A partir de las propiedades anteriores, es muy sencillo justificar que el producto de dos números negativos debe dar como resultado un número positivo:

$$\begin{aligned}
(-3) \cdot (-5) &= [(-1) \cdot 3] \cdot [(-1) \cdot 5] && \text{Donde escribimos cada número negativo como producto de "}-1\text{"por ese número positivo.} \\
&= [(-1) \cdot (-1)] \cdot 3 \cdot 5 && \text{Los productos por "}-1\text{"los agrupamos primero dado que el producto es conmutativo y asociativo.} \\
& && \text{Dado que } (-1) \cdot (-1) \text{ equivale a poner } (-1) \cdot a \text{ con } a = -1\text{, entonces } (-1) \cdot (-1) = -(-1) \\
&= [-(-1)] \cdot 3 \cdot 5 && \text{Como hemos visto que el opuesto del opuesto de un número es ese número, entonces "} - (-1) = 1\text{".} \\
&= 1 \cdot 3 \cdot 5 \\
&= 15
\end{aligned}$$

- Para justificar que el producto entre un número positivo y otro negativo debe dar como resultado un número negativo:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-5) &= 3 \cdot [(-1) \cdot 5] \\ &= (-1) \cdot [3 \cdot 5] \\ &= (-1) \cdot 15 \\ &= -15 \end{aligned}$$

Las operaciones involucradas en los ejemplos anteriores podríamos haberlas hecho en general utilizando números enteros arbitrarios a y b, lo cual justifica la *regla de los signos* enunciada al principio de esta sección, la cual es común abreviar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} + \cdot + &= + \\ + \cdot - &= - \\ - \cdot + &= - \\ - \cdot - &= + \end{aligned}$$

3.4.3. División en el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$

El conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$ tiene una estructura muy particular que permite definir la noción de *divisibilidad*.

Dado que los números enteros se pueden *dividir* utilizado el conocido algoritmo[1] de división entera, que permite efectuar la división entre un número $a \in \mathbb{Z}$ por otro número $b \in \mathbb{Z}$, obteniendo un cociente $q \in \mathbb{Z}$ y un resto $r \in \mathbb{Z}$, podemos expresar la relación que hay entre esos cuatro números de la siguiente forma:

$$a = b \cdot q + r$$

donde $0 \leq r < b$. Si $r = 0$ diremos que a es *divisible* por b, o indistintamente que b divide a a. Caso contrario diremos que a no es divisible por b o bien que b no divide a a. El número a se llama *dividendo;* b se llama *divisor;* q es el *cociente* de la división de a por b; y r es el *resto* de la misma.

Diremos que $a \in \mathbb{Z}$ es *múltiplo* de $b \in \mathbb{Z}$ si y sólo si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b \cdot n$.

Ejemplos:

- 15 es múltiplo de 5 pues $15 = 5 \cdot 3$.
- 36 es múltiplo de 3 pues $36 = 3 \cdot 12$.
- 18 es múltiplo de “-3” pues $18 = (-3) \cdot (-6)$.
- 42 no es múltiplo de 5 pues $42 = 5 \cdot 8 + 2$, de donde el resto r de dividir a 42 por 5 es $r = 2 \neq 0$.
- -24 es múltiplo de -8 pues $-24 = (-8) \cdot 3$.
- -24 es múltiplo de 8 pues $-24 = 8 \cdot (-3)$.

Se puede observar que si a es múltiplo de b, entonces el número b está contenido en a un número entero de veces, es decir decimos que b divide a a. Y por lo tanto, $a = b \cdot n + 0$, donde el resto r de dividir a por b es $r = 0$. Al ser a divisible por b, entonces $a = b \cdot n$, lo cual quiere decir que b divide a a.

La razón de ser de la noción de divisibilidad en $\mathbb{N}$ responde a la necesidad de repartir una cantidad de objetos en partes iguales. Si los objetos están representado por números y parte de ellos o todos pueden ser negativos, entonces la noción de divisibilidad se extiende de forma natural al conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$, por ejemplo cuando representemos entradas o salidas de dinero.

[1]Donde entendemos por *algoritmo* a cualquier procedimiento que nos permita, a partir de una serie de pasos, obtener el resultado de una operación compleja.

Otros Ejemplos:

- La división entre $a = 32$ y $b = 5$ sería:

$$\overbrace{32}^{a} = \overbrace{5}^{b} \cdot \overbrace{6}^{q} + \overbrace{2}^{r}$$

  En este sentido 32 no es divisible por 5, pues el resto r de dicha división es $r = 2 \neq 0$. Esto significa la división entre 32 y 5 no da un número entero como resultado.

- El número entero $a = 42$ es divisible por $b = 7$, pues:

$$\overbrace{42}^{a} = \overbrace{7}^{b} \cdot \overbrace{6}^{q} + \overbrace{0}^{r}$$

  Como $r = 0$, entonces 7 divide a 42.

- Para repartir una bolsa con 250 caramelos masticables entre los 23 integrantes de un curso de 5° grado, en forma equitativa, procedemos como sigue:

$$\overbrace{250}^{a} = \overbrace{23}^{b} \cdot \overbrace{10}^{q} + \overbrace{20}^{r}$$

  que da un cociente $q = 10$ y un resto $r = 20$. Entonces debemos darle a cada niño 10 caramelos, y sobrarían 20. El cociente de 250 dividido 23 no pertenece al conjunto de los números enteros.

- ¿Cuántos caramelos debería tener la bolsa del ejemplo anterior, si sabemos que luego de darle 13 caramelos a cada niño, nos han sobrado 15 caramelos? Si llamamos a a la cantidad de caramelos de la bolsa, la cuenta que deberíamos hacer es, aplicando el algoritmo de división, es:

$$a = 23 \cdot 13 + 15 = 314$$

3.4.4. Expresión de un número entero como producto de factores

Los números enteros permiten ser expresados como un producto de otros números enteros. Por ejemplo:

$$48 = 8 \cdot 6$$

En muchos casos, para operar matemáticamente, conviene que los factores sean números que no puedan ser divisibles por otros que no sean la unidad o ellos mismos, para lo cual necesitamos precisar la noción de *número primo*.

Se dice que un número natural $p \in \mathbb{N}$ es un número primo *si y sólo si* tiene *dos divisores exactos* dentro del conjunto de números naturales: *la unidad* y sí *mismo*.

Por ejemplo, dentro del conjunto de números naturales:

- 7 es un número primo pues sólo es divisible por 1 y 7.
- 2 es un número primo pues sólo es divisible por 1 y 2.
- 43 es un número primo pues sólo es divisible por 1 y 43.
- 10007 es un número primo pues sólo es divisible por 1 y 10007.

En el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ se extiende la definición de número primo del siguiente modo:

Se dice que un número entero $p \in \mathbb{Z}$ es un número primo *si y sólo si* tiene *cuatro divisores exactos* dentro del conjunto de números enteros: más o menos la unidad y más o menos él mismo.

Por ejemplo, dentro del conjunto de números enteros:

- 7 es un número primo pues sólo es divisible por ± 1 y ± 7.
- -2 es un número primo pues sólo es divisible por ± 1 y ± 2.
- 43 es un número primo pues sólo es divisible por ± 1 y ± 43.
- -43 es un número primo pues sólo es divisible por ± 1 y ± 43.
- -10007 es un número primo pues sólo es divisible por ± 1 y ± 10007.
- El número $a = 9$ no es primo, pues sus divisores son ± 9, ± 3 y ± 1.

Los números enteros admiten una única expresión como producto de números enteros primos, que normalmente la denominamos *descomposición en factores primos* o bien *descomposición factorial*.

Ejercicio. La siguiente es una lista de números enteros con sus respectivas factorizaciones:

$$
\begin{aligned}
28 &= 2^2 \cdot 7 \\
39 &= 3 \cdot 13 \\
-54 &= -2 \cdot 3^3 \\
-360 &= -2^3 \cdot 3^2 \cdot 5
\end{aligned}
$$

En general los primos de la factorización se eligen positivos, se ordenan en forma creciente, y en los casos que se repita un factor varias veces se lo indica mediante una potencia. Si el número a descomponer es negativo, el signo se lo ubica al principio del producto de los factores.

3.4.5. Algoritmo para factorizar números enteros

Saber descomponer un número entero como producto de factores primos es importante para trabajar con fracciones, tal como lo haremos en el capítulo siguiente, en relación a la determinación del denominador común. Pero también es importante porque se usará todo el tiempo en muchísimas situaciones a lo largo de la carrera. Tan sólo para mencionar algún ejemplo concreto, digamos que en seguridad informática el problema de la factorización de números enteros es fundamental para la determinación de pares de claves públicas y privadas.

Para obtener la descomposición en factores primos de un número entero $a \in \mathbb{Z}$, realizamos los siguientes pasos o instrucciones:

1. Sea $a \in \mathbb{Z}$ el número que deseamos factorizar. Si a es primo, ya está factorizado y la ejecución del algoritmo termina. Caso contrario, buscamos el menor número primo positivo p_1 que divida a a, y efectuamos la división:
$$a = p_1 \cdot a_1 \tag{3.4.1}$$
Entonces p_1 es el primer factor primo de la descomposición de a, y a_1 es el cociente de dicha división.

2. Ejecutar nuevamente el paso anterior, reemplazando a por a_1. Nuevamente hay dos posibilidades:

   a) El número a_1 es primo, entonces la factorización ha terminado.

   b) Existe un primo positivo p_2 que divide a a_1 — *análogamente a lo hecho anteriormente se adopta como p_2 al menor número primo que divide a a_1*. En este caso escribimos:
   $$a_1 = p_2 \cdot a_2 \tag{3.4.2}$$
   Entonces reemplazando (3.4.2) en (3.4.1) obtenemos:
   $$a = p_1 \cdot p_2 \cdot a_2$$

3. Si continuamos realizando los pasos 1 y 2, o sea *iterando* dichos pasos, llegará un momento en que $a_n = 1$ — *que ya no puede descomponerse más en factores* — y esto indica el final de la descomposición.

4. En este momento la expresión en producto de factores primos de a queda:

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$$

pero es posible que se repitan varias veces un mismo primo en dicha factorización. El paso final consiste en contar las veces que se repite cada primo, y colocarlo elevado a la potencia correspondiente.

Dentro del campo de la matemática y en el conjunto de los números enteros se plantea un *teorema de descomposición factorial de números enteros*, cuya justificación acabamos de realizar, que se puede expresar matemáticamente como:

$$a = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

donde a es un número entero cualquiera, $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n$ son números enteros positivos primos, y los números enteros $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ representan el número de veces que se repite cada número primo en la descomposición.

Como ejemplo, encontremos la factorización prima de $a = 720$. Para ello implementamos los pasos del *algoritmo de factorización* en una tabla como la que sigue:

$a = 720$	$2\ (p_1)$
$360\ (a_1)$	$2\ (p_1)$
$180\ (a_2)$	$2\ (p_1)$
$90\ (a_3)$	$2\ (p_1)$
$45\ (a_4)$	$3\ (p_2)$
$15\ (a_5)$	$3\ (p_2)$
$5\ (a_6)$	$5\ (p_3)$
$1\ (a_7)$	Fin

En el espacio superior izquierdo se coloca el número a descomponer, $a = 720$ en este caso y en el espacio superior derecho se coloca el menor número primo positivo por el cual es divisible el número a. En la fila siguiente, luego de la raya, se coloca a la izquierda el resultado de dividir el número a por p_1, que en este caso da como resultado 360. Y del lado derecho se ubica el menor número primo positivo por el cual es divisible el número de la izquierda: 360. Las demás filas se construyen de manera análoga.

El procedimiento termina cuando el último cociente realizado en la columna de la izquierda da 1.

Comprobamos que el número primo 2 se repite cuatro veces en la factorización, el número primo 3 dos veces, y el 5 sólo aparece una vez. Por lo que puede expresarse:

$$720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

donde el 1 no es necesario colocarlo.

Cabe acotar que a los números que no son primos muchas veces se los denomina números compuestos, pues pueden expresarse como producto de números primos.

Muchas veces debemos expresar como producto de factores primos a números relativamente grandes donde no es fácil encontrar a primera vista cuál es el menor primo positivo que lo divide. Para ello hay métodos que se pueden seguir y que seguramente se verán al tratar el tema de *seguridad informática* donde es común trabajar con números primos muy grandes, para generar números compuestos difíciles de factorizar. La seguridad informática involucra temas como *encriptación de datos* que consiste en transmitirlos habiéndolos alterado previamente de modo que sólo los pueda reconocer quién tenga la clave para desencriptarlos.

La factorización de números enteros se utilizará durante toda la carrera en temas como suma de fracciones, que se verá en el punto siguiente, pero el acostumbramiento a ellos resultará indispensable cuando se traten temas de seguridad informática.

3.4.6. Mínimo Común Múltiplo y Máximo Común Divisor

El mínimo común múltiplo y el máximo común divisor se utilizan ampliamente para simplificar la operatoria con fracciones, sobre todo cuando haya que determinar comunes denominadores para sumarlas. Si bien generalmente se utiliza la calculadora para determinar el resultado de las operaciones con fracciones, es necesario que el ingeniero comprenda los fundamentos de estas operaciones que utiliza normalmente. Por otra parte, cuando las fracciones contengan letras que representen números arbitrarios, probablemente se complique la utilización de la calculadora para determinar el resultado, y en este caso es necesario conocer cómo realizar dicha operación prescindiendo del uso de la misma.

Muchas veces es necesario encontrar un número entero que sea múltiplo de otros dos, pero que no necesariamente sea el producto de ambos porque suele ser muy grande.

Por ejemplo, si queremos encontrar un múltiplo común a los números $a = 18$ y $b = 22$, el camino más simple es realizar el producto de ambos, a saber:

$$m = a \cdot b = 18 \cdot 22 = 396$$

Normalmente en los problemas concretos en que se debe calcular un múltiplo común a dos o más números enteros, es conveniente calcular el valor del mínimo múltiplo común posible. A ese número se lo denomina *mínimo común múltiplo* de los números enteros correspondientes y se indica como "mcm".

Expresado de manera más formal, tomando sólo dos números enteros a y b, podemos expresar al mínimo común múltiplo entre esos números simbólicamente mediante:

$$m = \text{mcm}\,(a, b)$$

Este número $m = \text{mcm}\,(a, b)$ tiene la propiedad de ser múltiplo a la vez de a y de b, y es el menor número natural con esa propiedad. El mínimo común múltiplo se toma siempre como número positivo, pues no hay un número negativo que cumpla con ser el *menor* múltiplo común de a y b, pues hay infinitos números negativos cada vez menores.

Como hemos dicho, el producto $a \cdot b$ es siempre múltiplo común de a y de b, razón por la cual deberá ser:

$$m = \text{mcm}\,(a, b) \leq |ab|$$

Además para ser múltiplo de a y de b simultáneamente, es necesario que m sea mayor o igual que el valor absoluto del mayor de dichos números.

Análogamente en muchas oportunidades es necesario encontrar un número que divida simultáneamente a dos o más números enteros dados. Por ejemplo si $a = 18$ y $b = 24$, entonces los divisores comunes a ambos son ± 2, ± 3 y ± 6. Estos números resultan ser divisores comunes de a y de b simultáneamente. Observemos que $+6$ es el más grande de todos, y justamente al resolver problemas concretos muchas veces surge la necesidad de encontrar el máximo divisor común de ambos. A dicho número lo llamaremos *máximo común divisor* entre a y b, pudiendo observar que el mismo será un divisor positivo, en virtud de que ningún número negativo será más grande que cualquier número positivo dado. Y lo notaremos según:

$$d = \text{mcd}\,(a, b)$$

Observemos además que para poder ser d un divisor común de a y b, es necesario que d sea menor o igual que el valor absoluto del menor de dichos números.

Ejemplo 3.4.1. Los ejemplos que siguen ilustran estrategias para simplificar la determinación del mínimo común múltiplo y máximo común divisor entre dos o más números enteros. Como dijimos anteriormente, la comprensión de cómo efectuar estos cálculos sirve para simplificar la operatoria con fracciones, tal como se verá en el capítulo siguiente.

1. El mínimo común múltiplo entre 6 y 15 es $m = \text{mcm}\,(6, 15) = 30$ pues 30 es múltiplo de 6 y de 15 a la vez, y es el menor número entero con esta propiedad.

2. El mínimo común múltiplo entre 20 y 12 es $m = \text{mcm}\,(20, 12) = 60$ pues 60 es múltiplo de 20 y 12 a la vez, y es el menor número entero con esta propiedad.

3. El mínimo común múltiplo entre 32, 48 y 16 es $m = \text{mcm}\,(36, 48, 16) = 48$ pues 48 es múltiplo de 32, 48 y 16 a la vez, y es el menor número con esta propiedad. En este ejemplo particular vemos que el mínimo común múltiplo es igual al valor absoluto del mayor de los números en cuestión.

4. El mínimo común múltiplo entre 34, 39 y 35 es $m = \text{mcm}\,(34, 39, 35) = 46410$, que en este caso corresponde directamente al producto de los tres números, pues no hay ningún número más chico con esta propiedad.

5. El máximo común divisor entre 30 y 42 es $d = \text{mcd}\,(30, 42) = 6$ pues 6 divide a 30 y a 42 y es el mayor número entero con dicha propiedad.

6. El máximo común divisor entre 28 y 12 es $d = \text{mcd}\,(28, 12) = 4$ pues 4 divide a 28 y a 12 y es el mayor número entero con dicha propiedad.

7. El máximo común divisor entre 32, 48 y 16 es $d = \text{mcd}\,(32, 48, 16) = 16$ pues 16 divide a los tres números en cuestión y es el mayor con esta propiedad. En este ejemplo particular vemos que el mcd coincide con el valor absoluto del menor de los tres números.

8. El máximo común divisor entre 6 y 35 es $d = \text{mcd}\,(6, 35) = 1$ pues el número 1 es el mayor número positivo que divide simultáneamente a 6 y a 35.

En el último ejemplo vemos que el $\text{mcd}\,(6, 35) = 1$. Cuando ocurra esto diremos que los números en cuestión son *coprimos*. En símbolos, si:

$$d = \text{mcd}\,(a, b) = 1$$

entonces diremos que a y b son coprimos.

El método utilizado en el ejemplo anterior para calcular el máximo común divisor $\text{mcd}\,(a, b)$ y el mínimo común múltiplo $\text{mcm}\,(a, b)$ fue intuitivo, y en general suele ser dificultoso hacerlo de esta forma. Existen métodos sistemáticos para obtener el $\text{mcd}\,(a, b)$ y el $\text{mcm}\,(a, b)$, que simplifican en gran medida el proceso de obtención de los mismos.

3.4.7. Algoritmos para calcular el mcd y el mcm

A los efectos de hallar el $\text{mcd}\,(a, b)$ y el $\text{mcm}\,(a, b)$ veremos a continuación en un ejemplo que es de suma utilidad expresar los números a y b en su descomposición factorial.

Consideremos la descomposición factorial de los números:

$$a = 360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$
$$b = 700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

Observemos que toda vez que un factor primo es común a ambos números, entonces dicho factor divide a a y a b simultáneamente. Si construimos un número que sea el producto de los *factores comunes* a los números a y b, contados la *menor cantidad de veces* que aparecen en las dos descomposiciones, dicho número será:

$$2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$$

Este número es un divisor común de a y b simultáneamente.

Como en esta sección utilizaremos frecuentemente la operación de división, es conveniente reemplazar la utilización de los dos puntos que hemos utilizado hasta ahora para simbolizar la división entre dos números a y

b — $a : b$ — por la notación que se utiliza normalmente al resolver problemas concretos mediante expresiones matemáticas, que consiste en colocar en lugar de los dos puntos, una barra que separa horizontalmente al dividendo del divisor. Es decir, escribiremos:

$$a : b \longleftrightarrow \frac{a}{b}$$

A esta raya horizontal se la denomina *barra de fracción* tal como veremos en el capítulo siguiente cuando abordemos el conjunto de números racionales.

Cabe acotar que la barra de fracción cuando se necesita escribir el dividendo y el divisor en un mismo renglón, suele reemplazarse por la barra inclinada a/b.

Si al número a y al número b por separado los dividimos por el número 20, entonces:

$$\frac{a}{20} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cancel{5}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{5}} = 2 \cdot 3 \cdot 3$$
$$\frac{b}{20} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{5} \cdot 5 \cdot 7}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{5}} = 5 \cdot 7$$

vemos que los números resultantes ahora no tienen factores comunes. De esto se concluye que el número 20 obtenido con este procedimiento es el mayor de los divisores comunes que admiten los números a y b, de donde de acuerdo a su definición:

$$d = \operatorname{mcd}(a, b) = 20$$

Para calcular el *mínimo común múltiplo* m, podemos construirlo de la siguiente forma:

- Para que m sea múltiplo de a necesitamos que en su factorización aparezcan como mínimo:
  - Tres números 2.
  - Dos números 3.
  - Un número 5.
- Para que m sea múltiplo de b necesitamos que en su factorización aparezcan como mínimo:
  - Dos números 2.
  - Dos números 5.
  - Un número 7.

La forma más económica de conseguir este objetivo es incluir en el número m que construiremos como *mínimo común múltiplo* los siguientes factores:

- Tres números 2.
- Dos números 3.
- Dos números 5.
- Un número 7.

Resultando:

$$m = \operatorname{mcm}(a, b) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 12600$$

Observemos que si al producto ab lo dividimos por el mcd (a, b) se obtiene justamente:

$$\begin{aligned}
\frac{ab}{\operatorname{mcd}(a,b)} &= \frac{(2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot \cancel{5})\cdot(\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 5\cdot 5\cdot 7)}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{5}}\\
&= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\\
&= 12600
\end{aligned}$$

que es precisamente el *mínimo común múltiplo* entre a y b.

Podemos enunciar en general los algoritmos obtenidos en los ejemplos anteriores, de la siguiente forma. Supongamos que queremos calcular el $\operatorname{mcd}(a,b)$ y el $\operatorname{mcm}(a,b)$. Lo primero que deberíamos hacer es encontrar la factorización en primos tanto de a como de b. Supongamos que:

$$\begin{aligned}
a &= p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}\\
b &= q_1^{\beta_1}\cdot q_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot q_m^{\beta_m}
\end{aligned}$$

Entonces:

- El $\operatorname{mcd}(a,b)$ es el número $d\in\mathbb{Z}$ que se construye multiplicando los primos *comunes* a la factorización de a y de b, elevados a la *menor* potencia.
- El $\operatorname{mcm}(a,b)$ es el número $m\in\mathbb{Z}$ que se construye multiplicando los primos *comunes y no comunes* en la factorización de a y de b, elevados al *mayor* exponente.
- La relación entre el $\operatorname{mcd}(a,b)$ y el $\operatorname{mcm}(a,b)$, según se desprende de lo indicado anteriormente, es:

$$\operatorname{mcm}(a,b) = \frac{ab}{\operatorname{mcd}(a,b)}$$

Ejemplo 3.4.2. Calculemos el $\operatorname{mcd}(a,b)$ y el $\operatorname{mcm}(a,b)$ de algunos de los números propuestos en el ejemplo 3.4.1.

1. $a = 30$ y $b = 42$.

   Factoricemos primero ambos números:

   $$\begin{aligned} 30 &= 2\cdot 3\cdot 5\\ 42 &= 2\cdot 3\cdot 7\end{aligned}$$

   Según el procedimiento anterior, resulta:

   $$\begin{aligned} \operatorname{mcd}(30,42) &= 2\cdot 3 = 6\\ \operatorname{mcm}(30,42) &= 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 210\end{aligned}$$

   Y vemos que se verifica la relación entre ambos:

   $$\operatorname{mcm}(a,b) = \frac{ab}{\operatorname{mcd}(a,b)} \Leftrightarrow 210 = \frac{30\cdot 42}{6}$$

2. $a = 28$ y $b = 12$.

   Factorizando ambos números:

   $$\begin{aligned} 28 &= 2^2\cdot 7\\ 12 &= 2^2\cdot 3\end{aligned}$$

   Según el procedimiento anterior, resulta:

   $$\begin{aligned} \operatorname{mcd}(28,12) &= 2^2 = 4\\ \operatorname{mcm}(28,12) &= 2^2\cdot 3\cdot 7 = 84\end{aligned}$$

   Y vemos que nuevamente se verifica la relación entre ambos:

   $$\operatorname{mcm}(a,b) = \frac{ab}{\operatorname{mcd}(a,b)} \Leftrightarrow 84 = \frac{28\cdot 12}{4}$$

3. $a = 6$ y $b = 15$.

   Factorizando ambos números:

$$\begin{aligned} 6 &= 2 \cdot 3 \\ 15 &= 3 \cdot 5 \end{aligned}$$

   Según el procedimiento anterior, resulta:

$$\begin{aligned} \operatorname{mcd}(6, 15) &= 3 \\ \operatorname{mcm}(6, 15) &= 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \\ \operatorname{mcm}(a, b) &= \frac{ab}{\operatorname{mcd}(a, b)} \Leftrightarrow 30 = \frac{6 \cdot 15}{3} \end{aligned}$$

4. $a = 20$ y $b = 12$.

   Factorizando ambos números:

$$\begin{aligned} 20 &= 2^2 \cdot 5 \\ 12 &= 2^2 \cdot 3 \end{aligned}$$

   Según el procedimiento anterior, resulta:

$$\begin{aligned} \operatorname{mcd}(20, 12) &= 2^2 = 4 \\ \operatorname{mcm}(20, 12) &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \\ \operatorname{mcm}(a, b) &= \frac{ab}{\operatorname{mcd}(a, b)} \Leftrightarrow 60 = \frac{20 \cdot 12}{4} \end{aligned}$$

Capítulo 4

Números Racionales $\mathbb{Q}$

4.1. Teoría Básica

Definición 4.1.1. El conjunto de números racionales es aquel formado por todos los posibles cocientes de números enteros. Se simboliza por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{N} \right\}$$

El cociente de dos números enteros se conoce también como relación o razón entre esos dos números y usualmente se lo denomina *fracción*. La palabra cociente nos indica cuántas veces el número entero a entra en b y la palabra fracción, que ya utilizamos antes y posee el mismo significado matemático, indica la parte de b que representa a. Por ejemplo la fracción $\frac{3}{5}$ indica que del número 5 se toman 3 partes y la relación es justamente esa fracción $\frac{3}{5}$.

Por convención, el signo del número racional está contemplado en el número $a \in \mathbb{Z}$, mientras que tomamos $b \in \mathbb{N}$ para evitar de antemano una posible división por cero.

En una fracción $\frac{a}{b}$ al número a se lo denomina *numerador*, y al número b *denominador*.

Ejemplos de fracciones son:

$$\frac{3}{4}; \frac{2}{5}; \frac{5}{1}; \frac{-32}{17} = -\frac{32}{17}; \frac{79}{81}$$

En la fracción $\frac{-32}{17}$ el signo "$-$" del número a se lo asigna a toda la fracción en virtud de la regla de los signos, y por esa razón escribimos el signo menos delante de la barra de fracción. Si a es positivo no cabe duda que el signo de la fracción es también positivo y normalmente no se indica delante de la raya de fracción, salvo que lo requiera la expresión matemática que uno está tratando. En las expresiones matemáticas cuando se tiene una fracción con signo negativo delante de la raya de fracción, muchas veces será necesario colocarla entre paréntesis incluyendo adentro el signo negativo para que no exista ambigüedad $\left(-\frac{32}{17}\right)$.

Observación 4.1.1. Los números racionales sirven para representar proporciones y es fácil comprobar que los números enteros forman parte del conjunto de números racionales — $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ — pues cada número entero $a \in \mathbb{Z}$ puede ser concebido mediante la siguiente fracción:

$$a = \frac{a}{1} \in \mathbb{Q}$$

donde 1 pertenece a $\mathbb{N}$ por definición y por ende es siempre positivo.

Esta observación indica que si $b = 1$ entonces el número racional $\frac{a}{b} = \frac{a}{1} = a$ es un número entero.

Si el número $b \neq 1$ y a no es divisible por b, entonces el número racional $\frac{a}{b}$ no es entero y se lo denomina *número fraccionario*.

Conviene distinguir entre lo que denominamos *fracción* y lo que llamamos *número fraccionario*. La *fracción* es todo cociente entre un número entero y un número natural — *para evitar que el denominador sea nulo* — donde a puede o no ser divisible por b, en tanto que por número fraccionario entendemos sólo las fracciones $\frac{a}{b}$ donde *a no es divisible por b*.

Observación 4.1.2. De lo dicho surge que el conjunto de los números racionales está formado por los números enteros y los números fraccionarios, que se escribe simbólicamente como:

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{F}$$

donde $\mathbb{F}$ representa al conjunto de números fraccionarios.

Veamos algunas situaciones donde los números racionales son útiles para representar ciertas magnitudes:

- Tres amigos se reúnen a comer juntos. A tales efectos se compra una pizza, la cual se divide en 8 porciones. Uno de ellos come 3 porciones, el otro sólo dos, y el tercero — *que es vegetariano* — lleva para sí mismo una calabaza hervida, razón por la cual no consume ninguna porción de pizza. Determinar qué fracción de pizza se consumió y qué fracción sobró.

  Solución:

  Los dos amigos que consumieron pizza, comieron en total 5 de las 8 porciones, entonces la fracción que representa la cantidad de pizza consumida es:

  $$x = \frac{5}{8}$$

  Como quedaron sin consumir 3 porciones de pizza, entonces la fracción que representa el sobrante es:

  $$y = \frac{3}{8}$$

  Observemos que:

  $$x + y = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

  nos da el total de la pizza.

- De los 52 bancos de un aula, 20 de destinan a alumnos varones, 25 se destinan a alumnas mujeres, y el resto quedan sin utilizar. Las fracciones que representan la proporción de bancos utilizados por varones, niñas, y sin utilizar respectivamente son:

  $$\frac{20}{52} \qquad \frac{25}{52} \qquad \frac{7}{52}$$

  Si queremos sumar las tres fracciones y recordamos por ejemplo que $\frac{20}{52} = \frac{20}{1} \cdot \frac{1}{52} = 20 \cdot \left(\frac{1}{52}\right)$, entonces realizar la suma será muy sencillo pues podremos extraer $\left(\frac{1}{52}\right)$ como factor común, lo que equivale a sumar los numeradores con un denominador común.

  Nuevamente, si sumamos las tres fracciones nos da el entero 1, que representa el total de bancos disponibles en el aula. En efecto:

  $$\frac{20}{52} + \frac{25}{52} + \frac{7}{52} = \frac{20 + 25 + 7}{52} = \frac{52}{52} = 1$$

- En un depósito de zapatillas deportivas, hay 150 pares de zapatillas blancas, 230 pares de zapatillas rojas y 175 pares de zapatillas negras. Del total de zapatillas en el depósito: ¿Cuáles son las fracciones que representan la proporción de pares de zapatillas blancas, rojas y negras respectivamente?

  Solución:

  El total de pares de zapatillas que hay en el depósito es $150 + 230 + 175 = 555$. Pero entonces las fracciones pedidas son respectivamente:

  $$\frac{150}{555} \qquad \frac{230}{555} \qquad \frac{175}{555}$$

4.1.1. Fracciones equivalentes

Dos fracciones:

$$x = \frac{a}{b} \qquad\qquad y = \frac{c}{d}$$

se dirán *equivalentes* si y sólo si representan al mismo número racional. Para comprender por qué ocurre ello con dos fracciones aparentemente distintas basta ver que si:

$$x = \frac{27}{15} \qquad\qquad y = \frac{45}{25}$$

aunque *aparentemente* parecen fracciones diferentes, ambas representan el mismo número racional que podemos escribir como:

$$x = \frac{9}{5}$$

Para comprobarlo podemos aprovechar la factorización de números enteros como producto de factores primos. Si factoreamos numerador y denominador de x encontramos que el menor primo divisor de 27 es 3 y análogamente, también es 3 el menor número entero primo divisor de 15. De esta manera podemos escribir:

$$x = \frac{27}{15} = \frac{3 \cdot 9}{3 \cdot 5} = \frac{9}{5}$$

dado que el número 3 se cancela al multiplicar y dividir simultáneamente al número x.

El mismo procedimiento se puede realizar con la fracción y dado que el número entero 5 es el menor número primo que divide al numerador y al denominador:

$$y = \frac{45}{25} = \frac{5 \cdot 9}{5 \cdot 5} = \frac{9}{5}$$

lo que comprueba que:

$$x = y = \frac{9}{5}$$

Análogamente, si:

$$x = \frac{8}{4} \qquad\qquad y = \frac{16}{8}$$

ambas representan el mismo número racional, que en este caso es entero $x = y = 2$.

Para comprender la definición formal que se realiza para decir cuándo dos fracciones son equivalentes basta recordar que en el ejercicio 16 del capítulo de números naturales — *pág. 31* — vimos que la división o cociente es la operación inversa de la multiplicación y se utilizó el ejemplo: si $8 \cdot 4 = 32$ entonces $8 = 32 : 4 = \frac{32}{4}$.

Esto nos indica que un factor que se encuentra multiplicando en este caso en el primer miembro, el 4, puede *pasar* como divisor del número que se encuentra en el otro miembro. Y esta operación es enteramente válida de acuerdo a cómo introducimos la división como operación inversa de la multiplicación.

Recíprocamente si un número se encuentra como denominador — *o divisor* — de una fracción, el mismo puede pasar multiplicando al otro miembro: si $\frac{32}{4} = 8$ entonces $32 = 4 \cdot 8$.

Formalmente, escrito con letras de acuerdo a la definición 4.1.1 se puede definir fracciones equivalentes como:

Definición 4.1.2. Dados:

$$x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \qquad\qquad y = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$$

diremos que x e y son *fracciones equivalentes* si y sólo si el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda resulta igual al producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda. En símbolos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \boxed{ad = bc}$$

Se observa de inmediato que lo afirmado no es más que pasar el b que se encuentra como divisor en el primer miembro multiplicando al segundo miembro y al d que se encuentra como divisor del segundo miembro multiplicando al primero.

4.1.2. Fracciones reducibles e irreducibles

En la sección anterior hemos visto cuándo dos fracciones son equivalentes, y comprobamos a partir de los ejemplos que en esos casos en una o en las dos fracciones podía *simplificarse* numerador y denominador cuando al descomponerlos en factores primos, poseían uno o más factores comunes. En este caso se dice que estamos en presencia de una *fracción reducible*, ya que al simplificar hemos disminuido el valor numérico del numerador y del denominador, manteniendo la misma fracción.

Cuando no pueda realizarse un proceso de simplificación como el descripto anteriormente o, cuando ya se ha reducido la fracción a los valores mínimos posibles de numerador y denominador, diremos que estamos en presencia de una *fracción irreducible*. En este último caso, de acuerdo a la definición dada oportunamente, se desprende que numerador y denominador son números enteros coprimos.

Formalmente la definición de *fracción irreducible* es:

Definición 4.1.3. Dado un número $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{a}{b}$ con $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{N}$, diremos que x es una *fracción irreducible* si a y b no tienen divisores comunes, es decir cuando a y b son coprimos.

Tener en cuenta que si a y b son coprimos sólo admiten como divisor común a los números ± 1 — *mcd* $(a, b) = 1$ *dado que* $-1 < 1$ *y por lo tanto el mayor divisor común es* 1.

Ejemplo 4.1.1.

- La fracción $\frac{27}{6}$ es reducible pues tanto numerador como denominador son divisibles por 3.
- La fracción $\frac{14}{5}$ es irreducible pues 14 y 5 no tienen divisores primos comunes.

Observación. Hemos visto que una fracción $x = \frac{a}{b}$ es *reducible* si a y b tienen divisores primos comunes. Si ese divisor común es el mayor posible — *lo que hemos definido como máximo común divisor* — la fracción equivalente a la anterior que se obtendrá, será *irreducible*. En símbolos esto es:

$$x = \frac{\frac{a}{\mathrm{mcd}(a,b)}}{\frac{b}{\mathrm{mcd}(a,b)}} = \frac{a'}{b'} \tag{4.1.1}$$

donde el numerador $a' = \frac{a}{\mathrm{mcd}(a,b)}$ y el denominador $b' = \frac{b}{\mathrm{mcd}(a,b)}$. La fracción $\frac{a}{b}$ es reducible y equivalente a la fracción irreducible $\frac{a'}{b'}$.

Por ejemplo:

$$\frac{27}{6} = \frac{\frac{27}{3}}{\frac{6}{3}} = \frac{9}{2}$$

donde $\mathrm{mcd}(27, 6) = 3$.

Escribirlo de este modo produce un resultado similar al que hubiéramos obtenido escribiendo 27 como $3 \cdot 9$ y 6 como $3 \cdot 2$, simplificando luego el 3 en el cociente:

$$\frac{27}{6} = \frac{\cancel{3} \cdot 9}{\cancel{3} \cdot 2} = \frac{9}{2}$$

Nota: Siempre que se tenga una fracción debe convertírsela de ser posible en fracción irreducible. Si como resultado de alguna cuenta u operación se obtiene una fracción reducible, siempre se debe simplificar tantas veces como sea necesario para pasar a una fracción irreducible equivalente de la misma.

4.1.3. Expresión decimal de los números racionales

Al estudiar la división se ve que al dividir dos números el resultado puede ser un número entero — *cuando el dividendo era múltiplo del divisor* — o si no ocurre esto, en el cociente se puede obtener una parte entera — *que puede ser nula* — y al no ser el resto 0 podemos continuar el proceso de división agregando números decimales después de la coma hasta obtener un resto igual a 0, o bien si esto no ocurriera nunca, terminar con el número de decimales que se necesiten.

Teniendo en cuenta que nos expresamos normalmente en un *Sistema Posicional de Base* 10, o lo que es lo mismo en un *Sistema Decimal*, el número 324 se expresará como:

$$324 = 300 + 24 + 4$$

donde $300 = 3 \cdot 10^2$; $20 = 2 \cdot 10^1$ y $4 = 4 \cdot 10^0$.

Si el número en lugar de ser un entero de valor 324, está comprendido entre 324 y 325, se lo podrá expresar con una *parte entera* y una *parte decimal* colocando una coma a la derecha del dígito de unidades y agregando nuevos números también hacia la derecha, cuyo peso surge de inmediato ya que:

$$324{,}52 = 300 + 20 + 4 + 0{,}5 + 0{,}02$$

Un número elevado a un exponente negativo es igual al inverso de dicho número elevado al mismo exponente pero con signo positivo, lo que se verifica fácilmente mediante el siguiente razonamiento:

$$1 = a^0 = a^{1-1} = a^1 \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1}$$

Pasando a dividiendo al otro miembro resulta:

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Si elevamos ambos miembros a cualquier exponente $n \in \mathbb{N}$ obtenemos en general:

$$\left(a^{-1}\right)^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\left(a^{-1}\right)^n = a^{(-1)\cdot n} = a^{-n}$$

resulta:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Ahora estamos en condiciones de escribir la descomposición del número 324,52 en una suma de potencias de base diez incluyendo exponentes negativos, señalando que el exponente de 10 decrece una unidad por cada posición hacia la derecha, partiendo del dígito de mayor peso:

$$324{,}52 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$$

donde hemos extendido el significado de la relación biunívoca entre la posición y una potencia de diez hacia ambos lados de la *unidad*.

Si queremos encontrar la fracción que corresponde al número 324,52, bastará escribir los términos que están a la derecha de la unidad como fracciones, y sumarlas. Se entiende que los términos que están a la izquierda de la unidad incluyendo a ella misma, son fracciones con denominador igual a uno:

$$\begin{aligned} 324{,}52 &= 300 + 200 + 4 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} \\ &= \frac{30000 + 2000 + 400 + 50 + 2}{100} = \frac{32452}{100} \end{aligned}$$

Notar que un número de varios dígitos con parte decimal puede escribirse como *fracción decimal* simplemente poniendo como numerador todos los dígitos seguidos sin la coma y como denominador un uno seguido de tantos ceros como dígitos tiene la parte decimal.

Una *fracción decimal* es aquella que tiene como denominador a una potencia de diez, y muchas veces puede reducirse simplificando numerador y denominador.

En este caso:

$$324{,}52 = \frac{32452}{100} = \frac{16226}{50} = \frac{8113}{25}$$

la cual es ya irreducible pues numerador y denominador son coprimos.

Inversamente podemos decir que el *desarrollo decimal* de una fracción es simplemente la escritura de la misma expresada como su *parte entera* seguida de una coma y su *parte decimal*.

Todo número racional admite una representación decimal, por ejemplo:

$$\begin{array}{lll} 3 = 3 & \dfrac{3}{2} = 1{,}5 & \dfrac{61}{3} = 20{,}333\cdots \\ \dfrac{1}{2} = 0{,}5 & \dfrac{2}{3} = 0{,}666\cdots & \dfrac{13}{9} = 1{,}444\cdots \end{array}$$

Cualquier número $x \in \mathbb{Q}$ admite un *desarrollo decimal* o *expresión decimal*, cuya parte decimal será finita como en el caso de $x = \frac{3}{2} = 1{,}5$ o bien podrá tener infinitas cifras hacia la derecha, aunque en este caso las infinitas cifras deberán comenzar a repetirse a partir de alguno de los dígitos, de manera *periódica*.

Concretamente hay tres tipos de números racionales dependiendo cómo sea su *desarrollo decimal*, y podemos resumirlos en estos tres ejemplos:

$$\begin{array}{cl} 21{,}3271 & \leftarrow\text{Desarrollo decimal finito} \\ 12{,}234234\cdots = 12{,}\overset{\frown}{234} & \leftarrow\text{Desarrollo decimal periódico puro} \\ 29{,}345787878\cdots = 29{,}345\overset{\frown}{78} & \leftarrow\text{Desarrollo decimal periódico mixto} \end{array}$$

donde el símbolo en forma de arco indica cuáles son los dígitos que se repiten indefinidamente en forma periódica.

Como puede verse en los ejemplos anteriores, en el primer caso sólo hay una cantidad de decimales finitos después de la coma, y su desarrollo decimal se llama *finito*. En el segundo ejemplo hay una cantidad infinita de decimales después de la coma, pero se repiten una y otra vez, y su desarrollo decimal se llama *periódico puro*. En el último ejemplo, luego de los tres primeros dígitos después de la coma, los que siguen se repiten indefinidamente. En este caso decimos que el desarrollo decimal es *periódico mixto*.

Para escribir en forma de fracción un número racional expresado en su desarrollo decimal, veremos que hay una regla para hacerlo en cada uno de estos casos:

1. Si el desarrollo decimal es finito:

   $$21{,}3271 = \frac{213271}{10000}$$

   Simplemente ponemos todos los dígitos del número en el numerador, y en el denominador un uno seguido de tantos ceros como lugares hay después de la coma hacia la derecha.

2. Para verificar que todo número racional periódico puro puede escribirse como número fraccionario se puede partir de la expresión decimal de fracciones que tienen por numerador al número 1 y por denominador a un número formado por una sucesión de nueves:

Al realizar los cocientes respectivos se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{9} &= 0{,}111111\cdots = 0,\overset{\frown}{1}\\
\frac{1}{99} &= 0{,}010101\cdots = 0,\overset{\frown}{01}\\
\frac{1}{999} &= 0{,}001001\cdots = 0,\overset{\frown}{001}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Si un número racional tiene un desarrollo decimal periódico puro de un sólo dígito como ser $2{,}11111\cdots = 2,\overset{\frown}{1}$, es fácil ver que lo podemos escribir como:

$$2 + 0,\overset{\frown}{1} = 2 + \frac{1}{9}$$

Operando resulta que:

$$2,\overset{\frown}{1} = \frac{2\cdot 9 + 1}{9} = \frac{2\,(10-1)+1}{9} = \frac{20-2+1}{9} = \frac{21-2}{9}$$

Esto muestra que al número $2,\overset{\frown}{1}$ lo podemos formar mediante una fracción cuyo numerador se construye restando al número entero formado por los dígitos de la parte entera del número original seguidos de los dígitos que integran la parte periódica, la parte entera del número original, y cuyo denominador es nueve:

$$2,\overset{\frown}{1} = \frac{21-2}{9} = \frac{19}{9}$$

Para comprender cómo generalizar lo anterior a números cuya parte periódica esté compuesta por una cantidad mayor de dígitos, pensemos en el número del segundo ejemplo $12{,}123123\cdots = 12,\overset{\frown}{123}$, el cual podemos descomponerlo de la siguiente forma:

$$12,2\overset{\frown}{34}$$

$$12,2\overset{\frown}{34} = 12 + 0{,}234 + 0{,}000234 + 0{,}000000234 + \cdots$$

donde a simple vista se observa que a la parte entera 12 se va sumando el número 234 corrido de manera que se vaya repitiendo. Expresado lo mismo verticalmente:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & & & & & & & & & & \\
 & 0, & 2 & 3 & 4 & & & & & & & \\
 & 0, & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & & & & \\
 & 0, & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & \\
\vdots & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
- & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
1 & 2, & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 & 4 & \cdots
\end{array}$$

Con esta disposición queda claro que el grupo de tres dígitos periódicos “234” se va corriendo tres ceros hacia la derecha cada vez que se agrega una suma. Este corrimiento de tres ceros implica multiplicar cada fila de la suma por $10^{-3} = 0{,}001$, con lo que la descomposición en forma de sumatoria queda:

$$12,2\overset{\frown}{34} = 12 + 234\left(10^{-3} + 10^{-3}\cdot 10^{-3} + 10^{-6}\cdot 10^{-3} + 10^{-9}\cdot 10^{-3} + \cdots\right)$$

que desarrollados en forma de coma decimal resulta:

$$\begin{aligned}
12,\widehat{234} &= 12 + 0{,}234 + 0{,}000234 + 0{,}000000234 + \cdots \\
&= 12 + 234 \cdot (0{,}001 + 0{,}000001 + 0{,}000000001 + \cdots) \\
&= 12 + 234 \cdot 0{,}001001001001\cdots \\
&= 12 + 234 \cdot 0,0\widehat{01}
\end{aligned}$$

Como se vio:

$$0,0\widehat{01} = \frac{1}{999}$$

lo que implica que:

$$\begin{aligned}
12,\widehat{234} &= 12 + 234 \cdot \frac{1}{999} = 12 + \frac{234}{999} \\
&= \frac{12 \cdot 999 + 234}{999} \\
&= \frac{12 \cdot (1000 - 1) + 234}{999} \\
&= \frac{12000 - 12 + 234}{999} \\
&= \frac{12234 - 12}{999}
\end{aligned}$$

Así el algoritmo que valía para el caso de sólo un dígito periódico ubicado a continuación de la coma decimal, también se aplica al caso de tres dígitos, sólo que esta vez en el denominador hay tres nueves en lugar de uno, y esa cantidad coincide con la de dígitos periódicos.

Esta conclusión se puede generalizar en un *algoritmo* aplicable a todo *desarrollo decimal periódico puro*, donde el número racional escrito en forma de fracción — *que resulta igual al escrito en forma de desarrollo decimal* — se puede expresar con un numerador que resulta de la diferencia entre el número entero formado por la parte entera seguida de los dígitos periódicos y la parte entera del número original, y un denominador que consta de tantos nueves como dígitos tenga la parte periódica:

$$12,\widehat{234} = \frac{12234 - 12}{999} = \frac{12212}{999}$$

la cual queda de este modo porque es irreducible.

3. Si el desarrollo decimal es periódico mixto también se puede encontrar un *algoritmo* para expresarlo en *forma fraccionaria*, que se basa en las mismas estrategias que las indicadas en el punto anterior, ya que es muy simple expresar a un número periódico mixto como cociente entre un número periódico puro y una potencia de diez, como puede verse reescribiendo el número del tercer ejemplo que vimos cuando introdujimos los números periódicos:

$$29{,}345\widehat{78} = \frac{29345,\widehat{78}}{1000}$$

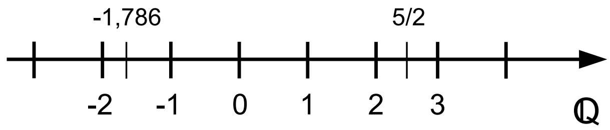
El numerador es un número periódico puro, que podemos escribir en la forma indicada en el punto anterior:

$$\begin{aligned}
29{,}345\widehat{78} &= \frac{29345,\widehat{78}}{1000} \\
&= \frac{\frac{2934578-29345}{99}}{1000} = \frac{2934578 - 29345}{99 \cdot 1000} \\
&= \frac{2934578 - 29345}{99000} = \frac{2905233}{99000} \\
&= \frac{968411}{33000}
\end{aligned}$$

donde llegamos a la fracción irreducible.

Para expresar números que poseen un desarrollo decimal periódico mixto como fracción utilizaremos un *algoritmo* que indica que en el numerador se coloca el número entero formado por la parte entera seguida de la parte decimal no periódica seguida de la parte decimal periódica menos ese número sin la parte periódica, y en el denominador se coloca tantos nueves como dígitos tenga la parte periódica seguido de tantos ceros como tenga la parte decimal no periódica.

Los números racionales también pueden ser representados en la recta numérica:



Aunque el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ es denso — *lo que se explica en el punto siguiente* — no todos los números de la recta numérica pueden ser identificados con un número racional, según se verá en el capítulo siguiente al introducir los números irracionales.

4.1.4. Propiedades de los números racionales

Las propiedades adicionales del conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ se pueden resumir en:

1. *Densidad:* A diferencia de $\mathbb{Z}$ que es un conjunto discreto, $\mathbb{Q}$ es *denso*, lo que significa que entre dos números racionales $x < y$ siempre existe un $z \in \mathbb{Q}$ tal que:

$$x < z < y$$

A modo de ejemplo, si $x = 2{,}3$ e $y = 2{,}4$, entonces podemos tomar $z = 2{,}35$ y se verifica que:

$$x < z < y$$

2. *Existencia de números inversos o recíprocos:* Dentro del conjunto $\mathbb{Z}$, salvo para los números 1 y -1, no se puede hallar el inverso de un número. Por ejemplo si $a = 3$, no existe $b = \frac{1}{3}$ dentro del conjunto $\mathbb{Z}$. En cambio en el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$, al existir los números fraccionarios, no hay dificultad en obtener el recíproco de cualquier fracción no nula. Esta propiedad se suele indicar como que en el conjunto $\mathbb{Z}$, el producto de dos números enteros no puede ser igual a la unidad — *salvo para* 1 *y* -1 — en tanto que en $\mathbb{Q}$, si $x \in \mathbb{Q}$, con $x \neq 0$, siempre existe un $y \neq 0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x \cdot y = 1$. A un número y con esta propiedad se lo llama inverso multiplicativo de x, y lo designaremos indistintamente, de acuerdo a lo visto anteriormente, por x^{-1} o bien $\frac{1}{x}$. Por ejemplo:

   - Si $x = \frac{2}{3}$ entonces su inverso multiplicativo será $y = \frac{1}{\frac{2}{3}}$ y multiplicando numerador y denominador de y por 3 obtenemos la fracción:

   $$y = \frac{3}{\frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}} = \frac{3}{2}$$

   que verifica que:

   $$xy = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

   - Si $x = \frac{7}{5}$ entonces su inverso multiplicativo será $y = \frac{5}{7}$ pues $xy = \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7} = 1$.
   - Si $x = \frac{a}{b}$ con a y b distintos de 0, por la misma razón su inverso será $y = \frac{b}{a}$ pues $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

4.1.5. Operaciones con números racionales

Las operaciones básicas *suma, resta, multiplicación* y *división* se extienden a los números racionales. Describiremos brevemente la forma de operar con fracciones.

4.1.6. Suma y resta de fracciones

Para sumar o restar dos fracciones que tienen un mismo denominador, la fracción resultante es aquella que se obtiene sumando los numeradores y manteniendo como denominador al denominador común de ambas. En símbolos:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$
$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

Como ejemplos:

$$\frac{3}{7}+\frac{18}{7}=\frac{3+18}{7}=\frac{21}{7}$$
$$\frac{14}{5}-\frac{8}{5}=\frac{14-8}{5}=\frac{6}{5}$$

Cuando las fracciones a sumar y/o restar no tengan un denominador común, tendremos que obtener dos fracciones equivalentes a las primeras, pero que lo tengan:

$$x=\frac{a}{b} \qquad\qquad y=\frac{c}{d}$$

La forma inmediata sería tomar como denominador común al producto de los denominadores bd haciendo:

$$x=\frac{ad}{bd} \qquad\qquad y=\frac{bc}{bd}$$

donde hemos multiplicado por un mismo número al numerador y denominador de una fracción, y por lo tanto esto no altera la misma, siendo fracciones equivalentes. En la práctica conviene obtener fracciones equivalentes con un denominador lo más chico posible, dado que el producto $b \cdot d$ puede ser un número muy grande e incómodo de manejar, tal como se ve en el siguiente ejemplo:

$$\frac{7}{25}+\frac{8}{75}=\frac{7\cdot 75+8\cdot 25}{25\cdot 75}=\frac{725}{1875}$$

La fracción resultante no es irreducible y tiene un denominador muy grande. Para llegar a la expresión irreducible deberíamos simplificar lo más posible:

$$\frac{725}{1875}=\frac{\cancel{5}\cdot 145}{\cancel{5}\cdot 375}=\frac{\cancel{5}\cdot 29}{\cancel{5}\cdot 75}=\frac{29}{75}$$

De esta forma concluimos que:

$$\frac{7}{25}+\frac{8}{75}=\frac{29}{75}$$

Una forma de evitar denominadores tan grandes y luego tener que simplificar, es tomar como denominador común en lugar del producto bd, al mínimo común múltiplo entre b y d — $\operatorname{mcm}(b,d)$ — que normalmente será más chico que el producto bd. En símbolos:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot\frac{\operatorname{mcm}(b,d)}{b}+c\cdot\frac{\operatorname{mcm}(b,d)}{d}}{\operatorname{mcm}(b,d)}$$

La resolución numérica del segundo miembro no implica obtener una fracción irreducible, pero sí permite trabajar con números menores.

En el ejemplo numérico anterior el $\operatorname{mcm}(25,75)=75$ pues 75 es múltiplo de 25, por lo que:

$$\frac{7}{25}+\frac{8}{75}=\frac{7\cdot\frac{75}{25}+8\cdot\frac{75}{75}}{75}=\frac{7\cdot 3+8\cdot 1}{75}=\frac{29}{75}$$

lo que ahorra realizar simplificaciones y trabajar con números grandes.

Ejemplo. Realizar la siguiente suma de fracciones: $\frac{32}{40} + \frac{27}{48}$

Calculando el mcm $(40, 48) = 240$, entonces:

$$\frac{32}{40} + \frac{27}{48} = \frac{32 \cdot \frac{240}{40} + 27 \cdot \frac{240}{48}}{240} = \frac{32 \cdot 6 + 27 \cdot 5}{240} = \frac{327}{240}$$

La fracción resultante aún puede simplificarse, por lo que aún puede simplificarse ya que numerador y denominador son divisibles por 3:

$$\frac{32}{40} + \frac{27}{48} = \frac{\frac{327}{3}}{\frac{240}{3}} = \frac{109}{80}$$

que es el resultado final en forma de fracción irreducible, al que siempre hay que llegar cuando se opera con fracciones.

Ejemplo. Realizar la siguiente resta de fracciones: $\frac{17}{12} - \frac{13}{20}$

Como el mcm $(12, 20) = 60$, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{17}{12} - \frac{13}{20} &= \frac{17 \cdot \frac{60}{12} - 13 \cdot \frac{60}{20}}{60} \\ &= \frac{17 \cdot 5 - 13 \cdot 3}{60} \\ &= \frac{46}{60} \\ &= \frac{\cancel{2} \cdot 23}{\cancel{2} \cdot 30} \\ &= \frac{23}{30}\end{aligned}$$

De esta forma:

$$\frac{17}{12} - \frac{13}{20} = \frac{23}{30}$$

4.1.7. Multiplicación de fracciones

Para multiplicar fracciones se multiplican los numeradores y los denominadores. En símbolos esto es:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Ejemplos:

1.

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{2} = \frac{35}{6}$$

2.

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{25} = \frac{\overset{7}{\cancel{35}}}{\underset{15}{\cancel{75}}} = \frac{7}{15}$$

La simplificación del segundo ejemplo se puede realizar directamente en el primer miembro del siguiente modo:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{3} \cdot \frac{7}{\underset{5}{\cancel{25}}} = \frac{7}{15}$$

4.1.8. División de fracciones

Para dividir dos fracciones:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

basta tener en cuenta que cualquier fracción $\frac{m}{n}$ puede escribirse como $m \cdot \frac{1}{n}$.

En el caso de la división de dos fracciones, tendremos:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\frac{c}{d}}$$

Se vio que la inversa de una fracción puede escribirse llevando el denominador del denominador como numerador:

$$\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}$$

Esto nos permite escribir:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Notar que cuando se indica un cociente de dos fracciones, el numerador y el denominador tienen su raya de fracción y hay una raya de fracción que indica el cociente de ambas. *La raya de fracción que indica el cociente de dos fracciones siempre debe sobresalir en ambos costados a las rayas de las fracciones del numerador y del denominador* pues en expresiones matemáticas complejas resulta muy fácil cometer errores.

Por lo que se desprende la siguiente regla práctica:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplos:

1. $$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{20}$$

2. $$\frac{5}{12} : \frac{11}{6} = \frac{5 \cdot \cancelto{1}{6}}{\cancelto{2}{12} \cdot 11} = \frac{5}{22}$$

4.2. Ejercicios

Recordar que en cada ejercicio que se resuelva, se debe explicar en palabras en forma escrita cada paso del procedimiento utilizado, indicando las propiedades que se usan en cada operación. Análogamente debe poder realizarse la explicación mediante uso del lenguaje en forma oral.

1. Escribir el numerador o el denominador que falta para que las fracciones resulten equivalentes.

   a)

$$\frac{27}{30} = \frac{9}{} = \frac{}{20} = \frac{180}{} = \frac{}{60} = \frac{36}{} = \frac{45}{}$$

b)

$$\frac{36}{45} = \frac{360}{\quad} = \frac{\quad}{90} = \frac{12}{\quad} = \frac{\quad}{20} = \frac{108}{\quad} = \frac{4}{\quad}$$

2. Escribir como fracción irreducible:

a)	$\frac{36}{240} =$	*c*)	$\frac{48}{64} =$
b)	$\frac{24}{5} =$	*d*)	$\frac{81}{18} =$

3. Escriban mayor o menor según corresponda.

a)	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	*c*)	$\frac{4}{5}$	0,79	*e*)	$\frac{5}{4}$	$\frac{35}{28}$
b)	0,12	$\frac{3}{25}$	*d*)	$\frac{16}{2}$	$\frac{24}{3}$	*f*)	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$

4. Resuelver los siguientes ejercicios combinados con fracciones:

a)	$\frac{1}{4} + \frac{20}{7} \cdot \frac{21}{40} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$	*e*)	$4 \cdot \frac{1}{20} + \sqrt{\frac{1}{4}} + 2^0 =$
b)	$\frac{10}{15} : \frac{5}{9} - \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 2 =$	*f*)	$\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{21}{70} : \frac{21}{140} =$
c)	$\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} =$	*g*)	$\frac{\sqrt{25}}{3} - \frac{1}{10} : \frac{9}{5} - \frac{10}{9} =$
d)	$\frac{7}{12} - \sqrt{\frac{1}{100}} : \frac{3}{10} =$	*h*)	$\frac{3}{10} \cdot \frac{20}{9} + \sqrt{\frac{1}{9}} - 1 =$

5. Determinar el valor que debe tomar la letra para que las fracciones a ambos lados de la igualdad sean equivalentes. De ser necesario convertir los números expresados en notación decimal a fracción. Justificar en palabras en todos los casos cómo se llega a ese valor.

a)	$\frac{20}{3} = \frac{a}{7}$	*c*)	$\frac{1{,}2}{m} = \frac{0{,}8}{2}$
b)	$\frac{x}{0{,}5} = \frac{9}{8}$	*d*)	$\frac{c}{\sqrt{9}} = \frac{2^3}{2}$

6. Incluir ejercicios agregando exponentes negativos y positivos y potencia de potencia, etc...

4.3. Problemas

Recordar que en cada problema se debe explicar en palabras en forma escrita la manera de abordar el planteo y cada paso del procedimiento utilizado para resolverlo, justificandolos. Análogamente debe poder realizarse la explicación mediante uso del lenguaje en forma oral.

1. Javier ganó un premio de \$ 48.000 y utilizó ese dinero de la siguiente forma: $\frac{2}{5}$ para refaccionar su casa, $\frac{1}{3}$ para realizar un viaje y el resto lo guardó en la caja de ahorro del banco. ¿Cuánto dinero destinó en cada caso? ¿Qué parte del dinero guardó en el banco?

2. La quinta parte de los estudiantes de la clase tiene ojos café, y de estos, la mitad son varones. Tres octavos de los estudiantes de la clase tienen ojos verdes, y de estos, la tercera parte son mujeres. ¿Qué parte de los varones de la clase tienen ojos café? ¿Qué parte de las mujeres de la clase tiene ojos verdes?

3. En un colegio de 1200 estudiantes, el 60 % son varones y el resto mujeres. ¿Cuántos varones y mujeres hay? Si se inscriben 32 varones más: ¿Cuáles son los nuevos porcentajes?

4. Sergio decidió organizar sus vacaciones de la siguiente forma: la cuarta parte de los días estará en una estancia; la tercera parte, en el campo y 10 días los pasará en la playa. ¿Cuántos días tiene de vacaciones y cuánto tiempo pasará en la estancia?

5. En una colección de monedas, la cuarta parte es de oro, dos tercios de plata y 200 monedas son de cobre. ¿Cuántas monedas hay de cada tipo?

6. Se pintó el frente de un edificio en tres etapas: en la primera se pintó desde el techo hacia abajo la quinta parte de la altura del edificio, en la segunda se continuó desde donde habían quedado y se pintó la mitad de la altura del edificio, y en la tercera etapa los últimos doce metros. ¿Cuál es la altura del edificio? ¿Qué parte de la altura se pintó en la tercera parte?

7. Inés tiene 16 años. La razón entre la edad de Inés y la de su mamá es $\frac{4}{11}$. ¿Cuál es la edad de la mamá de Inés?

8. En una fiesta hay 90 chicas. La razón entre el número de mujeres y varones es $\frac{3}{4}$. ¿Cuántos varones hay en total? Durante el baile se arman el número máximo de parejas posibles con un chico y una chica cada uno. Suponiendo que los que quedan sin pareja no bailan: ¿Cuántos se quedan sin bailar? ¿Estos últimos son chicos o chicas?

9. Esteban tiene 5 sobres de jugo para preparar un refresco. La razón entre la cantidad de sobres y los litros que se pueden preparar es $\frac{2}{3}$. ¿Cuántos litros de refresco puede obtener en total?

4.4. Teoría Complementaria

4.4.1. Proporciones y Porcentajes

En la sección de Teoría Básica mencionamos que los números racionales sirven para representar proporciones. A continuación definiremos con más precisión la noción de *proporción* y *porcentaje*.

El aire que respiramos está compuesto de una mezcla de gases en diferentes cantidades, y aunque varían ligeramente de un lugar a otro donde se midan, si tomamos una muestra de 100 cm^3 de aire y analizamos su composición química es probable que encontremos que está compuesto de: 78 cm^3 de nitrógeno, 21 cm^3 de oxígeno, 0,04 cm^3 de dióxido de carbono y 0,96 cm^3 de una mezcla de gases inertes como ser helio, argón y neón.

Si en lugar de tomar una muestra de 100 cm^3 de aire tomamos 200 cm^3 seguramente veremos que las cantidades de los diferentes gases que lo componen se duplican: 156 cm^3 de nitrógeno, 42 cm^3 de oxígeno, 0,08 cm^3 de dióxido de carbono y 1,92 cm^3 de gases inertes.

Si en lugar de tomar 100 cm^3 tomamos 50 cm^3 obtendríamos que las cantidades de los diferentes gases se reducen a la mitad: 39 cm^3 de nitrógeno, 10,5 cm^3 de oxígeno, 0,02 cm^3 de dióxido de carbono y 0,48 cm^3 de gases inertes.

La *proporción* de cada uno de los gases que integran la mezcla que llamamos aire se define como el cociente entre la cantidad de dicho gas contenida en una muestra y la cantidad total de aire de la misma.

De acuerdo a lo visto en fracciones si se multiplica por un mismo número al numerador y denominador de la fracción, obtenemos una fracción equivalente y el resultado en desarrollo decimal es el mismo. Esto ocurrirá en este caso con las proporciones de cada gas componente del aire en las diferentes muestras.

A continuación analizaremos la *proporción* de cada uno de los gases en las diferentes muestras mencionadas:

$$\begin{aligned}
\text{Proporción de nitrógeno: } & \frac{78\cancel{cm^3}}{100\cancel{cm^3}} = \frac{156\cancel{cm^3}}{200\cancel{cm^3}} = \frac{39\cancel{cm^3}}{50\cancel{cm^3}} = 0{,}78 \\
\text{Proporción de oxígeno: } & \frac{21\cancel{cm^3}}{100\cancel{cm^3}} = \frac{42\cancel{cm^3}}{200\cancel{cm^3}} = \frac{10{,}5\cancel{cm^3}}{50\cancel{cm^3}} = 0{,}21 \\
\text{Proporción de dióxido de carbono: } & \frac{0{,}04\cancel{cm^3}}{100\cancel{cm^3}} = \frac{0{,}08\cancel{cm^3}}{200\cancel{cm^3}} = \frac{0{,}02\cancel{cm^3}}{50\cancel{cm^3}} = 0{,}0004 \\
\text{Proporción de de gases inertes: } & \frac{0{,}96\cancel{cm^3}}{100\cancel{cm^3}} = \frac{1{,}92\cancel{cm^3}}{200\cancel{cm^3}} = \frac{0{,}48\cancel{cm^3}}{50\cancel{cm^3}} = 0{,}0096
\end{aligned}$$

Como vemos la *proporción* de cada uno de los gases que integran la mezcla es independiente de la cantidad de la misma y es *adimensional* — no posee unidades — dado que representan un cociente de dos cantidades que poseen la misma dimensión.

4.4.2. Exponenciación de números racionales.

Al igual que los números naturales y enteros, los números racionales también pueden elevarse a la una potencia entera $n \in \mathbb{Z}$. Veremos a continuación algunas reglas para trabajar con exponentes.

Las propiedades siguientes son válidas para elevar un número racional x elevado a la potencia entera $n \in \mathbb{Z}$.

1. Si elevamos ambos miembros de una igualdad a la misma potencia entera $n \in \mathbb{Z}$, la igualdad se mantiene:

   $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{c}{d}\right)^n$$

   donde se sobreentiende que si dos fracciones son iguales es porque son equivalentes.

2. Para todo $n \in \mathbb{Z}$ vale que:

   $$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

   dado que la fracción representa un cociente entre numerador y denominador, esta operación significa aplicar la propiedad distributiva de la potenciación respecto al cociente.

3. Mediante un razonamiento análogo a lo ya analizado para números naturales, si $x = \frac{a}{b} \neq 0$ entonces:

   $$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

   Observemos que $\frac{a}{b}$ debe ser distinto de 0 pues 0^0 es una operación imposible de definir si queremos que el resultado de dicha operación sea compatible con las propiedades de las operaciones en cualquier conjunto numérico. A modo de justificación informal, si admitimos operar con 0^0 y pretendemos que cumpla con las propiedades de la exponenciación, tendríamos:

   $$0^0 = 0^{1-1} = 0^1 \cdot 0^{-1}$$

   y como 0^{-1} sería $\frac{1}{0}$ que no está definido, vemos que la operación 0^0 no existe.

4. Para cualquier $x \in \mathbb{Q}$, vale que:

   $$x^1 = x$$

   En realidad esta propiedad es un caso particular de la propiedad 2, pero es conceptualmente importante tener presente que todo número elevado a la 1 da como resultado el mismo número, y por eso la enunciamos a parte.

5. Elevar una fracción al exponente $n = -1$ simplemente invierte la fracción, esto es:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

6. Suma de exponentes: Si $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, entonces:

$$x^{n+m} = x^n \cdot x^m$$

para todo $n,\ m \in \mathbb{Z}$.

7. Resta de exponentes: Si $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, entonces:

$$x^{n-m} = \frac{x^n}{x^m} = \frac{1}{x^{m-n}}$$

para todo $n,\ m \in \mathbb{Z}$.

8. Potencia de potencia: Si $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, entonces:

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

Ejemplo 4.4.1. Utilizaremos todas las propiedades de las operaciones con fracciones para obtener una fracción equivalente — *no reducible* — partiendo de una expresión que contiene varias fracciones combinadas por distintas operaciones:

Tal como se indicó en el primer ejercicio propuesto con números naturales se irá explicando — *en palabras* — paso a paso el procedimiento.

Trataremos de reducir la expresión:

$$\frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{4}\right]^{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{8}}$$

En el primer paso eliminaremos los exponentes negativos utilizando la propiedad "$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$". Con lo que queda:

$$\frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{4}\right]^{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{8}} = \frac{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{4}\right]^{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{8}}$$

Utilizando la propiedad que dice que el producto de dos potencias de igual base es otra potencia de la misma base cuya potencia es la suma de los exponentes, reemplazamos "$\left(\frac{3}{2}\right)^{1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{4}$" por "$\left(\frac{3}{2}\right)^{5}$", resultando:

$$\frac{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{4}\right]^{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{8}} = \frac{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{5}\right]^{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{8}}$$

Aplicando la propiedad de que la potencia de otra potencia es una nueva potencia con la misma base cuyo exponente es el producto de los exponentes, se tiene:

$$\frac{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{5}\right]^{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{8}} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{10}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{8}}$$

Aplicando la propiedad que dice que el cociente de dos potencias de igual base es otra potencia de la misma base cuyo exponente es la diferencia de los exponentes, se tiene:

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{10}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{8}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10-8} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2}$$

Aplicando ahora la propiedad distributiva de la potenciación con respecto al cociente, obtenemos:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

que es la fracción irreducible buscada.

Capítulo 5

Números Reales $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

5.1. Teoría Básica

El conjunto de números racionales puede parecer en un principio suficiente para representar la totalidad de magnitudes que uno quisiera. Por ejemplo:

- El largo y ancho de una mesa rectangular.
- La evolución de la temperatura a lo largo del día, desde la mañana hasta la noche.
- La proporción de estudiantes que estudian Ingeniería Informática frente a la proporción de estudiantes que estudian Lic. en Ciencias Ambientales.
- La proporción de alumnos varones o mujeres en un curso de Análisis Matemático.
- Etc...

En los conjuntos $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$ es sencillo concebir magnitudes irrepresentables en ellos, pues basta con pensar por ejemplo en el largo o ancho de una mesa rectangular, que no tiene por qué ser una medida representable con un número entero. Por las características de los números racionales $\mathbb{Q}$ es menos intuitivo imaginar magnitudes irrepresentables en dicho conjunto, ya que tenemos la posibilidad de utilizar decimales.

Sin embargo hemos visto que una fracción $x = \frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ o bien es un número entero o bien puede tener un desarrollo decimal sólo de tres tipos:

1. *Desarrollo Decimal Finito*.
2. *Desarrollo Decimal Periódico Puro*.
3. *Desarrollo Decimal Periódico Mixto*.

Si imaginamos un número expresado en forma decimal donde la secuencia de sus dígitos a la derecha de la coma no se repiten nunca siguiendo el mismo orden — *de manera periódica* — éste número no podrá ser un número racional. Resulta sencillo construir un número de esta forma que se ve en la práctica normalmente, aunque generalmente se limitan los infinitos decimales a una cantidad de cifras finitas de acuerdo con la aproximación que queramos.

Uno de los ejemplos más comunes es el número π que expresa la relación entre la perímetro de una circunferencia y su diámetro, siendo:

$$\pi = \frac{P}{d} = 3{,}1415926535\cdots$$

que normalmente cuando hacemos las cuentas rápidas le colocamos $\pi \approx 3{,}14$.

Definición 5.1.1. A todo número que sea imposible de representar en $\mathbb{Q}$ lo llamaremos *número irracional*.

Otros dos ejemplos de números irracionales que se utilizan habitualmente son:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242096980785596718753 7\cdots$$

que tiene un desarrollo decimal infinito no periódico, razón por la cual el mismo es un número irracional imposible de representar en $\mathbb{Q}$. En los cálculos habituales se suelen tomar el número de decimales necesarios según la aproximación que uno necesite. Lo más común es tomar $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ dado que el decimal siguiente es menor que 5. Este número $\sqrt{2}$ lo podemos encontrar usualmente por ejemplo, al querer obtener la diagonal de un cuadrado.

$$e = 2{,}7182818284590452353602874713526624977572470936 9\cdots$$

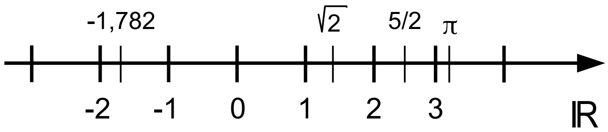
que tiene el mismo tipo de características, y que solemos aproximar muchas veces con los primeros tres decimales $e \approx 2{,}718$ pues el decimal que sigue es menor que 5. Este número se encuentra estrechamente vinculado a la modelización matemática de muchos fenómenos que ocurren en la naturaleza, en los circuitos eléctricos y sistemas mecánicos, así como también en economía. El número e se utiliza comunmente como base de las exponenciales y los logaritmos que se incluyen en las expresiones matemáticas que surgen del análisis de dichos modelos.

Si reunimos los números *racionales* y los que hemos llamado *irracionales* obtenemos un nuevo conjunto numérico que engloba a todos los anteriores y que denominamos *conjunto de los números reales* y lo indicaremos con la letra $\mathbb{R}$.

En símbolos esto es:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

es decir la unión entre los conjuntos de números racionales e irracionales. Este nuevo conjunto comprende los números que pueden expresarse como fracción y aquellos que sólo admiten un desarrollo decimal infinito no periódico, los cuales también pueden ser representados en la recta numérica:



Y ahora sí llegamos a un conjunto numérico donde a todos sus elementos les corresponde un punto de la recta numérica y análogamente cada punto de la recta numérica tiene su correspondiente número real asociado. Diremos que entre el conjunto de los números reales y los puntos de una recta hay una relación que se denomina *biunívoca*.

5.1.1. Operaciones con raíces

La forma más inmediata en que surgen números irracionales es aplicando la operación de radicación a ciertos números racionales. Por ejemplo, si bien $a = 2$ es un número racional — *que en este caso particular es entero pues su denominador es* 1 — hemos visto que $\sqrt{2}$ es un número irracional. Esto último pone de manifiesto la importancia de saber operar con expresiones que contengan raíces cuadradas o raíces n-ésimas en general.

Una expresión con *radicales* es cualquier expresión donde haya presentes operaciones de radicación. Por ejemplo, las siguientes expresiones contienen raíces:

$$2\sqrt{5} + 3\sqrt{15} - 7\sqrt{60}$$

$$\sqrt[3]{54} + 2\sqrt[3]{2} - 5\sqrt{50}$$

$$\frac{2 + 3\sqrt{2}}{3 - 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7}$$

Antes de poder operar con radicales, es preciso comprender una serie de propiedades que gobiernan su funcionamiento.

5.1.1.1. Propiedades de la radicación

A las propiedades válidas en los conjuntos numéricos ya vistos se le agregan las siguientes:

1. Si a y $b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, es aplicable la propiedad distributiva de la radicación respecto al producto:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

lo que es válido cualquiera sean los valores de a y de b siempre y cuando el índice n sea impar. Si el índice n fuera par esta propiedad sólo puede aplicarse si a y b son positivos, ya que los números negativos no poseen raíces de índice par dentro del conjunto de los números reales.

Por lo tanto podemos enunciar que la raíz $n-$ésima del producto de dos números reales no negativos es el producto de sus raíces n-ésimas.

2. Si a y $b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$, es aplicable la propiedad distributiva de la radicación respecto al cociente:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

lo que es válido cualquiera sean los valores de a y de b siempre y cuando el índice n sea impar. Si el índice n fuera par esta propiedad sólo puede aplicarse si a y b son positivos, ya que los números negativos no poseen raíces de índice par dentro del conjunto de los números reales.

Por lo tanto podemos enunciar que la raíz $n-$ésima del cociente de dos números reales positivos es el cociente de sus raíces n-ésimas.

3. Propiedad cancelativa:

   a) Si $n \in \mathbb{N}$ es impar, entonces:
$$\sqrt[n]{x^n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

   Por ejemplo:
$$\sqrt[3]{(-7)^3} = \left(\sqrt[3]{-7}\right)^3 = -7$$

   b) Si $n \in \mathbb{N}$ es par, entonces:
$$\sqrt[n]{x^n} = |x| \neq \left(\sqrt[n]{x}\right)^n \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

   pues si $x < 0$ entonces no existe $\sqrt[n]{x}$ dentro del conjunto de números reales. Por ejemplo:

$$\sqrt[6]{(-2)^6} = |-2| = 2$$

   en tanto que $\left(\sqrt[6]{-2}\right)^6$ es una expresión que no tiene solución en el conjunto $\mathbb{R}$.

   c) Si $x \geq 0 \in \mathbb{R}$:
$$\sqrt[n]{x^n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ sea par o impar.}$$

   Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{7^3} = \left(\sqrt[3]{7}\right)^3 = 7 \qquad\qquad \sqrt[6]{3^6} = \left(\sqrt[6]{3}\right)^6 = 3$$

4. **Exponente fraccionario**: Cuando el exponente es fraccionario — $\frac{n}{m}$ con n, $m \in \mathbb{N}$ y $x \geq 0$ — entonces:

$$x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$$

lo que se justifica fácilmente elevando ambos miembros de la igualdad a la misma potencia m:

$$\left(\sqrt[m]{x^n}\right)^m = \left(x^{\frac{n}{m}}\right)^m = x^{\frac{n}{\cancel{m}}\cdot\cancel{m}} = x^n$$

Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{2^6} = 2^{6/3} = 2^2 = 4$$

Esto implica que cuando se eleva un número a un exponente fraccionario equivale a elevar ese número al numerador de la fracción y extraer la raíz de índice igual al denominador.

A partir de esta propiedad es posible simplificar los índices de las raíces con los exponentes del radical, y obtener expresiones más sencillas, siempre que se cumplan las condiciones necesarias para asegurar la existencia de la raíz dentro del conjunto de los números reales. Queda claro que el exponente en forma de fracción puede reducirse a una fracción equivalente y en particular a una fracción equivalente irreducible.

Por ejemplo:

$$\sqrt[6]{x^{22}} = x^{\frac{22}{6}} = x^{\frac{11}{3}} = \sqrt[3]{x^{11}}$$

Debe tenerse mucho cuidado con el signo de la x ya que no siempre es válido simplificar exponentes cuando x es negativo. En este caso si x es negativo el lado izquierdo da un número positivo en tanto que el derecho da un número negativo pues si $x = -2$ cuando lo elevamos al exponente 22 se vuelve positivo, y al extraer su raíz sexta sigue siendo positivo, en tanto que cuando lo elevamos al exponente 11 da como resultado un número negativo y su raíz cúbica sigue siendo un número negativo.

Observación. Resulta inmediato que las propiedades indicadas en los puntos anteriores siguen siendo válidas para exponentes o índices fraccionarios, aunque no es habitual trabajar con índices fraccionarios, ya que obliga a imponer restricciones al radicando para que sea posible utilizarlas.

Nota: Tener en cuenta que al igual que la exponenciación, la radicación ***no posee*** propiedad distributiva respecto a la suma. Es decir:

$$\xcancel{\sqrt[3]{7+12} = \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{12}}$$

lo que puede comprobarse fácilmente haciendo la cuenta.

De manera más general lo podemos enunciar colocando:

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

5.1.1.2. Operaciones con números reales que contienen raíces

Para operar con raíces o radicales, especialmente cuando hay sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de números reales donde algunos de ellos contienen raíces de distintos números, conviene introducir ciertas formas de trabajar con las expresiones de modo que, si es posible, se puedan simplificar hasta llegar a una expresión lo más reducida posible.

Para realizar operaciones con expresiones que incluyan números que puedan contener raíces, en el caso de sumas y restas conviene encontrar para índices comunes, términos que posean el mismo radicando multiplicados por algún otro factor, de modo que se pueda sacar esa raíz como factor común de una suma o diferencia o simplificarlos en un cociente.

Ejemplo 5.1.1. Efectuar la siguiente suma de radicales: $\sqrt{3} + \sqrt{75}$.

Para intentar encontrar un único término que sea igual a la suma de estos dos radicales es posible descomponer en factores primos los radicandos y encontrar en los mismos una raíz de un mismo radicando multiplicada por un número. Si descomponemos en factores primos al número 75 resulta que $75 = 3 \cdot 5^2$ con lo que:

$$\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 5^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5^2} = \sqrt{3} \cdot 5 = 5 \cdot \sqrt{3}$$

Conviene observar que para evitar confusiones siempre que se tenga el producto de un número por una raíz conviene colocar el número a la izquierda de la raíz. De esta manera podemos efectuar la suma, pues:

$$\sqrt{3} + \sqrt{75} = \sqrt{3} + 5 \cdot \sqrt{3} = (1+5) \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

Cuando se puede hacer este tipo de operaciones que permitan sumar o restar dos radicales y obtener un único término con un sólo radical, se dice que esos radicales son *semejantes*.

Ejemplo 5.1.2. Indicar si los radicales $\sqrt[3]{40}$ y $\sqrt[3]{135}$ son semejantes. En caso de serlo, efectúe la suma y la diferencia.

Factorizando ambos radicandos:

$$40 = 2^3 \cdot 5 \qquad\qquad 135 = 3^3 \cdot 5$$

Reemplazando los radicandos por sus respectivas factorizaciones:

$$\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{5} = 2 \cdot \sqrt[3]{5}$$
$$\sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{5} = 3 \cdot \sqrt[3]{5}$$

por lo que ambos radicales son semejantes.

La suma y la diferencia darán:

$$\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135} = 2 \cdot \sqrt[3]{5} + 3 \cdot \sqrt[3]{5} = (2+3) \cdot \sqrt[3]{5} = 5 \cdot \sqrt[3]{5}$$
$$\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{135} = 2 \cdot \sqrt[3]{5} - 3 \cdot \sqrt[3]{5} = (2-3) \cdot \sqrt[3]{5} = (-1) \cdot \sqrt[3]{5} = -\sqrt[3]{5}$$

Ejemplo 5.1.3. En este ejemplo veremos que también radicales de distinto índice pueden ser semejantes, como es el caso de $\sqrt[3]{16}$ y $\sqrt[6]{4}$.

Descomponiendo los radicandos en factores primos:

$$16 = 2^4 \qquad\qquad 4 = 2^2$$

por lo que queda:

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4}$$
$$\sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2}$$

En algunos casos, como en este ejemplo, pueden llevarse las expresiones anteriores a factores que posean un radical de igual índice e igual radicando, simplemente escribiendo el exponente y el índice como un exponente fraccionario:

$$\sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}}$$

Dado que el producto de exponentes de potencias de igual base es igual a la misma base elevada a la suma de los exponentes, si el numerador del exponente es mayor que el denominador, se lo puede expresar como la suma de un número igual o múltiplo del denominador más la diferencia correspondiente.

En este caso:

$$2^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{3+1}{3}} = 2^{\frac{3}{3}+\frac{1}{3}} = 2^{1+\frac{1}{3}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

con lo que ambos radicales resultan:

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot \sqrt[3]{2}$$
$$\sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} = 2^{\frac{2}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

con lo que se ve que los radicales son semejantes y por lo tanto podemos efectuar su suma y su diferencia de modo que el resultado de un único término:

$$\sqrt[3]{16} + \sqrt[6]{4} = 2 \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = 3 \cdot \sqrt[3]{2}$$
$$\sqrt[3]{16} - \sqrt[6]{4} = 2 \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$$

Ejemplo 5.1.4. Con el mismo procedimiento podemos deducir que $\sqrt{28}$ y $\sqrt{20}$ no son semejantes.

Factorizando los dos radicandos:

$$28 = 2^2 \cdot 7 \qquad\qquad 20 = 2^2 \cdot 5$$

resulta:

$$\sqrt{28} = \sqrt{2^2 \cdot 7} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$$
$$\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Dado que los índices de las raíces son iguales pero los radicandos no, deducimos que no son semejantes y por lo tanto al sumarlos o restarlos no podremos obtener un único término.

Para realizar operaciones con expresiones que incluyan números que puedan contener raíces, en el caso de multiplicaciones y divisiones conviene también factorizar los radicandos para obtener términos donde puedan sacarse la mayor cantidad de factores comunes en los casos en que se tengan sumas y restas, lo que debe hacerse tanto en el numerador como en el denominador. En muchos casos se podrán simplificar los factores iguales que se encuentren a la vez en el numerador y en el denominador — *siempre y cuando los dos factores a simplificar multipliquen* ***a todo el numerador*** *y* ***a todo el denominador*** *respectivamente*.

En el caso de que haya raíces en el denominador resulta muy práctico tratar de operar algebraicamente para obtener expresiones equivalentes donde sólo haya raíces en el numerador. Se han desarrollado formas de operar para llegar a esto último, lo que analizaremos en base a ejemplos. El procedimiento de eliminar las raíces que pudieran existir en un denominador recibe el nombre de ***racionalizar el denominador*** *de la expresión algebraica*.

Si bien el proceso de racionalización se puede realizar en cualquier expresión que contenga raíces en el denominador, sólo es práctico llevarlo a cabo en determinados casos donde el procedimiento no es muy complejo y justifica hacerlo por la frecuencia en que aparecen ese tipo de expresiones en la modelización matemática de ciertos problemas o fenómenos.

Podemos distinguir dos casos particulares donde para racionalizar se utilizan procedimientos matemáticos fáciles de identificar y que son los casos más usuales. Uno de ellos es el que no contiene ni sumas ni diferencias en el denominador sino sólo una raíz de cualquier índice; el otro es cuando aparece en el denominador una suma o diferencia de dos términos que contienen raíces cuadraras uno de ellos o ambos.

Ejemplo 5.1.5. Consideremos la expresión:

$$\frac{7}{\sqrt[3]{25}}$$

Factoreando el radicando del denominador:

$$25 = 5^2$$

Reemplazando el radicando original por su expresión factoreada:

$$\frac{7}{\sqrt[3]{25}} = \frac{7}{\sqrt[3]{5^2}}$$

Si logramos que el exponente del radicando del denominador sea igual al índice de la raíz, se podrá simplificar siempre y cuando se cumplan las condiciones vistas anteriormente, cosa que se cumple en este ejemplo. En este caso habrá que llevar el 5^2 a un 5^3, lo que lograremos multiplicando $\sqrt[3]{5^2}$ por $\sqrt[3]{5}$, obteniendo así dentro de la raíz cúbica — *por aplicación distributiva de la raíz con respecto al producto* — el producto de $5 \cdot 5^2 = 5^3$. Dado que para poder multiplicar el denominador por un determinado factor sin que altere la expresión original *habrá que multiplicar el numerador por el mismo factor*, en este caso tendremos que multiplicar y dividir la expresión original por $\sqrt[3]{5}$:

$$\frac{7}{\sqrt[3]{25}} = \frac{7}{\sqrt[3]{5^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = 7\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2 \cdot 5}} = 7\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[\cancel{3}]{5^{\cancel{3}}}} = \frac{7 \cdot \sqrt[3]{5}}{5} = \frac{7}{5}\sqrt[3]{5}$$

Al haber multiplicado y dividido *numerador y denominador por el mismo factor* $\sqrt[3]{5}$ se ha logrado eliminar la raíz del denominador.

Ejemplo 5.1.6. Consideremos ahora la expresión:

$$\frac{2}{\sqrt[5]{81}}$$

En este caso el factoreo del radicando del denominador da:

$$81 = 3^4$$

con lo que

Debemos operar con la expresión original, a los efectos de eliminar la raíz quinta del denominador. Para ello, es conveniente factorizar los números o expresiones dentro del radical del denominador:

$$81 = 3^4$$

Como el índice de la raíz es 5 y el exponente del radicando 4, para poder aplicar la propiedad cancelativa necesitamos tener un 3^5 en lugar de un 3^4. Multiplicando y dividiendo la expresión original por $\sqrt[5]{3}$:

$$\frac{2}{\sqrt[5]{81}} = \frac{2}{\sqrt[5]{3^4}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3}} = \frac{2\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3^4 \cdot 3}} = \frac{2\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{2\sqrt[5]{3}}{\sqrt[\cancel{5}]{3^{\cancel{5}}}} = \frac{2\sqrt[5]{3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt[5]{3}$$

Para el caso de tener en el denominador una suma o diferencia de dos términos conteniendo raíces cuadraras uno de ellos o ambos se trata de buscar obtener en el denominador un producto dos factores de la forma $(A + B)\cdot(A - B)$ que resulta igual a $A^2 - B^2$ y que normalmente se lo denomina *diferencia de cuadrados*.

Ejemplo 5.1.7. En la expresión:

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

Para lograr eliminar la raíz del denominador el camino es multiplicar numerador y denominador por una expresión que permita llevar el denominador a una forma que permita obtener una diferencia de cuadrados. Como el denominador es $\left(1 + \sqrt{2}\right)$ entonces habrá que multiplicar y dividir por $\left(1 - \sqrt{2}\right)$ de manera tal que operando con el denominador obtengamos la diferencia de cuadrados:

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{1}{\left(1 + \sqrt{2}\right)} \cdot \frac{\left(1 - \sqrt{2}\right)}{\left(1 - \sqrt{2}\right)} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \cancel{\sqrt{2}} + \cancel{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{-1} = -1 + \sqrt{2}$$

De esta forma se ha eliminado la raíz del denominador.

Se ve de inmediato que en base a las propiedades analizadas oportunamente se podría haber escrito directamente:

$$\left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{2}\right) = 1 - \left(\sqrt{2}\right)^2$$

que muestra que la diferencia de cuadrados es resultado del producto entre la suma de dos términos multiplicada por la diferencia de dichos términos. Cuando se tiene una suma de dos factores $(A + B)$, a la diferencia de esos mismos dos términos $(A - B)$ se la llama muchas veces *expresión conjugada de* $(A + B)$.

Veamos a continuación un ejemplo más complicado, que involucre algunas cuentas más que el anterior, para fijar ideas.

Ejemplo 5.1.8. Consideremos ahora una expresión que tiene raíces de cualquier índice en el numerador y raíces cuadradas en el denominador:

$$\frac{1+\sqrt[3]{2}}{3+2\sqrt{3}}$$

Independientemente de lo que haya en el numerador, bastará multiplicar y dividir por la *expresión conjugada* del denominador, de modo de obtener en éste una diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned}
\frac{1+\sqrt[3]{2}}{3+2\sqrt{3}} &= \frac{\left(1+\sqrt[3]{2}\right)}{\left(3+2\sqrt{3}\right)}\cdot\frac{\left(3-2\sqrt{3}\right)}{\left(3-2\sqrt{3}\right)} = \frac{1\cdot 3-1\cdot 2\sqrt{3}+3\cdot\sqrt[3]{2}-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}{3^2-\left(2\cdot\sqrt{3}\right)^2}\\
&= \frac{3-2\sqrt{3}+3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}{9-2^2\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3-2\sqrt{3}+3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}{9-4\cdot 3}\\
&= \frac{3-2\sqrt{3}+3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}{-3} = -1+\frac{2}{3}\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}\\
&= \frac{2}{3}\sqrt{3}-1+\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}-1\right)\cdot\sqrt[3]{2} = \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}-1\right)+\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}-1\right)\cdot\sqrt[3]{2}\\
&= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}-1\right)\left(1+\sqrt[3]{2}\right)
\end{aligned}$$

Resumiendo, las reglas básicas para la operación con radicales son las siguientes:

1. Los radicales semejantes se pueden sumar y/o restar. Cuando sea necesario, tendremos que factorizar los números dentro de las raíces, para poder comprobar la semejanza o no de los radicales.

   Los radicales no semejantes *no se pueden sumar o restar entre sí.*

2. Para multiplicar expresiones que contengan radicales, lo haremos mediante la *propiedad distributiva*.

3. Para dividir expresiones cuyo denominador contiene radicales, hay que racionalizar previamente los denominadores, y operar con la o las expresiones resultantes.

5.1.2. Operaciones con logaritmos

Ya se ha visto que la operación inversa de la exponenciación es la *logaritmación*. Si $b^x = a$ entonces para despejar x del exponente se define la operación logaritmo. Dado que en la exponenciación al número b lo denominamos base, el logaritmo se define también a partir de una base, que coincide con la base de la exponenciación. De esta manera, si:

$$b^x = a$$

entonces:

$$x = \log_b(a)$$

donde b es la *base del logaritmo*, a se denomina *argumento del logaritmo*, y x es el resultado de la operación $\log_b(a)$.

Introduciremos el tema mediante algunos ejemplos muy simples:

1. ¿A qué exponente x debemos elevar al número 2 para que dé como resultado el número 32?

   Para resolver la cuestión tendremos que utilizar la operación logaritmo, escribiendo:

$$x = \log_2(32)$$

El número 2 al cual debemos elevar al exponente x pasa de ser la base de la exponencial a ser la base del logaritmo. Y el exponente al cual debemos elevar el número 2 para que de como resultado 32 lo podríamos hallar por ensayo y error. En este caso como $2^5 = 32$ entonces:

$$\log_2(32) = 5$$

es decir $x = 5$.

Esta forma de encontrar el exponente dada la base y el resultado de la exponenciación puede realizarse fácilmente cuando tanto la base, el argumento y el exponente son números naturales.

2. $\log_2(8) = 3$ pues $2^3 = 8$.
3. $\log_3(81) = 4$ pues $3^4 = 81$.
4. $\log_{10}(1000) = 3$ pues $10^3 = 1000$.

Analizaremos a continuación algunos casos simples en donde las tres cantidades definidas para la operación logaritmo dejan de ser números naturales.

1. Mantendremos la base perteneciente a $\mathbb{N}$ y analizaremos distintos valores para el argumento "a", pertenecientes a diferentes conjuntos numéricos. El valor x del resultado de la operación logaritmo podrá ser cualquier número real.

   Antes de ello, si bien $b \in \mathbb{N}$, debemos descartar el caso en que $b = 1$ pues 1 elevado a cualquier número da como resultado al mismo número 1, y por lo tanto a debería valer siempre 1, lo que no tiene ningún sentido práctico. De aquí en más supondremos $b \in \mathbb{N} \wedge b \neq 1$.

   a) $a \in \mathbb{N}_0$
   Obviamente el único caso que aún no hemos analizado es cuando $a = 0$, pero en este caso buscamos un número x tal que:

   $$b^x = 0$$

   lo cual es imposible porque ninguna base $b \in \mathbb{N}$ elevada a ningún exponente $x \in \mathbb{R}$ puede dar como resultado el número 0. Por esta razón concluimos que $\nexists \log_b(0)$ cualquiera sea el valor de b.

   b) $a \in \mathbb{Z}$
   Sólo queda por analizar cuando $a < 0$. Tomemos por ejemplo:

   $$\log_b(-4) = x$$

   Por definición de la operación logaritmo, debería cumplirse que:

   $$b^x = -4$$

   cosa que es imposible pues ninguna base $b \in \mathbb{N}$ elevada a ningún exponente $x \in \mathbb{R}$ puede dar como resultado un número negativo. Por esta razón concluimos que $\nexists \log_b(a)$ para ningún valor negativo de $a \in \mathbb{Z}$.

   c) $a \in \mathbb{Q}$
   Descartamos los valores de a negativos o nulo por la misma razón que se vio anteriormente.

   Por ejemplo si:

   $$\log_5\left(\frac{1}{25}\right) = x$$

   en este caso podrá haber solución dado que el número $b = 5 \in \mathbb{N}$ elevado a un número x negativo dará como resultado un número fraccionario. En este caso simple se puede obtener un número x por ensayo y error pues el denominador del argumento es una potencia de 5. En este caso encontrar el valor de x es inmediato pues:

   $$\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2}$$

lo que indica que debe ser $x = -2$.

Por lo tanto en general $\log_b(a)$ con $b \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{Q}$ tendrá solución cualquiera sea el valor de b y de a aunque sólo será simple de hallar en el caso de que a pueda reducirse a una potencia entera de b. Si $a > 1$ el resultado del logaritmo será un número x positivo en tanto que si $a < 1$ el resultado será negativo.

Para el caso $a = 1$, como toda base b elevada al exponente $x = 0$ da como resultado el número uno, entonces:

$$\log_b(1) = 0$$

pues $b^0 = 1$ para todo valor de $b \in \mathbb{N}$.

d) Si $a \in \mathbb{R}$

Habiendo analizado ya los casos en que a era natural, entero o racional, sólo queda por tratar el caso en que a sea un número irracional que no puede ser negativo ni cero por los motivos vistos anteriormente.

En este caso encontrar la solución por ensayo y error resulta posible ocasionalmente.

Un caso sería:

$$\log_5\left(\sqrt{5}\right) = x$$

por lo que debe cumplirse que:

$$5^x = \sqrt{5}$$

con lo que resulta inmediato que $x = \frac{1}{2}$.

Como conclusión general para base $b \in \mathbb{N}$ se vio que el argumento a puede ser cualquier número real positivo para que exista el $\log_b(a) = x$. Y el valor de x será un número perteneciente a $\mathbb{R}$.

El valor numérico de x sólo podrá obtenerse por ensayo y error en casos muy particulares, y para resolver el resto de los casos, si bien normalmente lo haremos con una calculadora, se deben usar métodos que surgen del análisis matemático.

2. Consideraremos ahora una base b que no tiene por qué ser un número natural en tanto que a y x podrán ser cualquier número real, con las restricciones ya vistas para el argumento a, que puede ser cualquier número real positivo — *y no nulo*.

a) $b \in \mathbb{N}_0$

Quedaría por analizar el caso $b = 0$. Si:

$$\log_0(a) = x$$

deberá ser:

$$0^x = a$$

y por lo tanto para cualquier $x \neq 0$ a debiera ser 0. Además x nunca puede ser 0 pues ya se vio que 0^0 es una operación que no tiene sentido. De acá resulta que la operación logaritmo nunca podrá ser de base 0 pues aún en el caso de ser $a = 0$ el valor de x quedaría indeterminado, pudiendo tomar cualquier valor de real distinto de 0.

b) $b \in \mathbb{Z}$

De este caso sólo resta analizar las bases b negativas, lo que implicaría poder operar con exponenciales de base $b < 0$, que tiene el problema de que no son aplicables todas las propiedades de la exponenciación vistas anteriormente. Se puede comprobar fácilmente realizando la operación $(-2)^3$ y descomponiendo el exponente en una suma de exponentes fraccionarios, que la propiedad de que el producto de potencias de igual base es igual a la misma base elevada a la suma de los exponentes, no se cumple.

Por un lado:

$$(-2)^3 = -8$$

pero si expresamos el exponente como una suma de fracciones con denominador par:

$$3 = \frac{6}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}$$

y lo reemplazamos en la expresión original, resulta:

$$(-2)^3 = (-2)^{\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)} = (-2)^{\frac{5}{2}} \cdot (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-2)^5} \cdot \sqrt{(-2)} = \sqrt{-32} \cdot \sqrt{-2}$$

donde ninguno de los dos factores puede resolverse dentro del conjunto de los números reales, por ser raíces de números negativos con índice par.

Por este motivo normalmente no se consideran los logaritmos de base b negativa.

c) $b \in \mathbb{Q}$

De este caso sólo resta analizar los casos en que $b > 0$, con $b \neq 1$. Por ejemplo:

$$\log_{\frac{1}{5}} (25) = x$$

si y sólo si:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25$$

Para que esto ocurra, surge de inmediato que el valor x del logaritmo deberá ser un número negativo, para que invierta la fracción.

En este caso, donde puede resolverse por ensayo y error, o bien *tanteo* o *inspección*, vemos que $x = -2$ es la solución pues:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5^2 = 25$$

produce el valor deseado. Entonces:

$$\log_{\frac{1}{5}} (25) = -2$$

d) $b \in \mathbb{R}$

Dado que se ha visto que debe ser $b > 0$ con $b \neq 1$, quedaría por analizar los casos en que b sea un número irracional. Por ejemplo:

$$\log_{\sqrt{7}} (49) = x$$

si y sólo si:

$$\left(\sqrt{7}\right)^x = 49$$

y en este caso, por inspección surge de inmediato que debe ser $x = 4$, pues:

$$\left(\sqrt{7}\right)^4 = \left[\left(\sqrt{7}\right)^2\right]^2 = 7^2 = 49$$

Observaciones:

1) Dado que nuestro sistema de numeración cotidiano es posicional de base 10, se puede facilitar el cálculo de logaritmos cuyo argumento a es una potencia de 10 eligiendo $b = 10$ como base del logaritmo, razón por la cual se utiliza con mayor frecuencia el $\log_{10}(a)$.
   Por este motivo al **logaritmo decimal de** a se lo suele expresar sin colocar el valor de la base:
   $$\log_{10}(a) = \log(a)$$
   sobreentendiéndose que la base de ese logaritmo es 10.
2) De acuerdo a lo dicho en la introducción de números irracionales, el número e es de gran importancia para la modelización de fenómenos naturales, apareciendo en muchos casos como base de exponenciaciones y base de logaritmos.
   Los logaritmos en base e de un argumento a cualquiera se escriben normalmente con la siguiente notación:
   $$\log_e(a) = \ln(a)$$

De este modo se abrevia la escritura de los logaritmos de base e, denominándolos *logaritmos naturales* o *neperianos* debido al nombre del matemático que los introdujo: JOHN NAPIER.
Lo observado en estos dos puntos justifica que en las calculadoras de mano se haya elegido programarlas de modo que se puedan obtener directamente los logaritmos en dichas bases.

En esta introducción se han elegido ejemplos donde el valor del logaritmo puede deducirse por inspección. Cuando no es posible, se utilizará la calculadora o el software matemático que se disponga en la PC para calcularlos.

Síntesis de las restricciones que deben imponerse a b, a y x para que exista el $\log_b(a) = x$.

1. Restricciones de b: El valor de b puede ser cualquier número real positivo distinto de 1.
2. Restricciones para a: El valor de a puede ser cualquier número real positivo.
3. Restricciones para x: No hay restricciones para el resultado x del logaritmo dentro del conjunto de los números reales.

5.2. Ejercicios

A continuación se plantearán una serie de ejercicios que incluyan las operaciones de radicación y logaritmación, que deben resolverse razonando cada ejercicio ***sin uso de calculadora*** y justificando en todos los casos el procedimiento utilizado y cada paso que se realice.

1. Aplicando las propiedades de los radicales, reducir la expresión original a una que resulte lo más sencilla posible:

   a) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{8} =$

   b) $\dfrac{\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{144}} =$

   c) $\dfrac{\sqrt[3]{64000}}{\sqrt[3]{8000}} =$

   d) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} =$

2. Hallar las siguientes potencias. De ser necesario, expresar la base en forma de fracción:

   a) $36^{\frac{1}{2}} =$

   b) $0{,}0025^{-\frac{3}{2}} =$

   c) $32^{-\frac{1}{4}} =$

   d) $\left(\dfrac{121}{144}\right)^{\frac{1}{2}} =$

   e) $1{,}728^{-\frac{1}{3}} =$

   f) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} =$

3. Convertir la expresión original que contiene a la letra a, a otra expresión equivalente donde a sea la base, elevada a un exponente fraccionario.

   a) $\sqrt[5]{a} =$

   b) $\sqrt[3]{\sqrt{a}} =$

   c) $\sqrt[5]{a^2} =$

   d) $\sqrt{\dfrac{a^{13}}{a^6}} =$

4. Extraer todos los factores posibles de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{18} =$

b) $3\sqrt{48} =$

c) $\sqrt{98a^3b^5c^2} =$

d) $2\sqrt{75x^4y^3} =$

e) $\dfrac{1}{2a}\sqrt{168a^5b^3} =$

f) $\dfrac{1}{3}\sqrt{54} =$

5. Reducir a la expresión más simplificada posible, justificando cada paso del procedimiento:

a) $5\sqrt{3} - \sqrt{12} =$

b) $7\sqrt{28} - \sqrt{63} + 6\sqrt{7} - \sqrt[6]{7^3} =$

c) $3\sqrt{18} - 11\sqrt{2} + \frac{1}{5}\sqrt{50} =$

d) $4\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{81} + 5\sqrt[3]{8} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{24} =$

6. Escriba V si piensa que la expresión es verdadera o F si piensa que la misma es falsa, justificando en palabras el razonamiento realizado en cada caso:

a) $\sqrt{2\sqrt{3}} = \sqrt[4]{6}$ ....

b) $\sqrt{5+2} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$ ....

c) $\sqrt{5 \cdot 2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$ ....

d) $\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ ....

e) $\sqrt{(-3)^2} = -3$ ....

f) $\sqrt{(-3)^2} = 3$ ....

7. Reducir a la mínima expresión posible las siguientes expresiones, justificando con palabras el procedimiento realizado:

a) $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3}} =$

b) $\sqrt[3]{125\sqrt{32\sqrt[3]{8}}} =$

c) $5\sqrt{\frac{1}{12}} + 2\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{27}} =$

8. Averiguar si el resultado es racional o irracional:

a) $\sqrt{5} + \sqrt{5} =$

b) $\sqrt{16} + \left(4 - \sqrt{25}\right) =$

c) $\sqrt{16} - \left(4 + \sqrt{25}\right) =$

d) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{27} - \sqrt{3}\right) =$

9. Racionalizar:

a) $\dfrac{-1}{\sqrt{6}} =$

b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{6}} =$

c) $\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}} =$

d) $\dfrac{4xy^2}{\sqrt[3]{2xy^2}} =$

e) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-5} =$

f) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} =$

10. Resolver, justificando en palabras el procedimiento:

    a) $(-3)^{\frac{1}{3}} \cdot (-3)^{\frac{5}{3}} =$

    b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} : \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} =$

    c) $\frac{4}{2^{\frac{3}{2}}} =$

    d) $\left(\frac{1}{2} + 2^{-1}\right)^{8} + \sqrt[3]{-8} =$

    e) $\frac{-4 + \sqrt{8}}{2} =$

    f) $\frac{3}{\sqrt{18} + \sqrt{18}} =$

11. Resolver, justificando el procedimiento. Tener en cuenta que se utiliza la convención $\log_{10}(a) = \log(a)$ y $\log_e(a) = \ln(a)$. Para toda otra base se utilizará la palabra $\log_b(a)$ donde b es la base correspondiente para ese logaritmo.

    a) $\log_5(625) =$

    b) $\log\left(\sqrt{10}\right) =$

    c) $\log_4\left(\frac{1}{64}\right) =$

    d) $\log_2(0{,}5) =$

    e) $\log_{16}(8) =$

    f) $\log_{0{,}01}(10) =$

12. Obtener una expresión reducida para los siguientes ejercicios, justificando en palabras el procedimiento seguido:

    a) $\log_2\left(\frac{(64 - 128)^2 \cdot \sqrt[4]{8}}{3 \cdot 512}\right) =$

    b) $\ln\left(\frac{a^2 (bc)^3}{\sqrt{a}}\right) =$

13. Escribir como un único logaritmo las siguientes expresiones, justificando en palabras el procedimiento seguido:

    a) $\log(2x - 2) - \log(2x) =$

    b) $4\ln(x) + 5\ln(x + 1) - 2\ln(x - 3) =$

14. Efectuar las siguientes operaciones dentro del campo de los números reales:

    a) $\frac{\log_6\left(216\sqrt{6}\right)}{\log_6(6)} - 1 =$

    b) $\frac{\log_3\left(\frac{81}{\sqrt{3}}\right) - \log_3(9)}{\log_3(3)} + 3 =$

5.3. Teoría Complementaria

5.3.1. Irracionalidad de $\sqrt{2}$

Durante muchos siglos, los griegos imaginaron que el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ era completo y suficiente para representar cualquier número. El descubrimiento de la raíz cuadrada de 2 como *número irracional* se atribuye generalmente al pitagórico Hipaso de Metaponto, quien fue el primero demostrar *geométricamente* su irracionalidad.

Su maestro Pitágoras creía en la definición absoluta de los números como medida, lo que obligaba a no concebir la existencia de números irracionales. Por este motivo estuvo en contra de la demostración y condenó a su discípulo Hipaso a la pena de muerte, por lo que la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ quedó en el olvido.

Haremos una demostración sencilla de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ que pone de manifiesto la necesidad de agregar al conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ los números irracionales $\mathbb{I}$, con lo que se completará la recta numérica que contiene todos los números reales $\mathbb{R}$.

Esta demostración la haremos a partir del enunciado de un teorema que servirá como ejemplo de cómo se procede para *enunciar* y *demostrar formalmente* una determinada propiedad, a partir de ciertas hipótesis. Cabe acotar que muchas demostraciones de teoremas se realizan suponiendo que ocurre lo contrario a lo que expresa la tesis del mismo, cosa que se denomina *demostración por el absurdo* ya que en algún momento se llega a una contradicción, que sólo puede interpretarse como que la suposición original es falsa, pero como se había supuesto lo contrario a aquello que se quería demostrar, esto implica que la tesis es verdadera.

Teorema 5.3.1. *Para todo número racional $x = \frac{p}{q}$ expresado como fracción irreducible, su cuadrado es distinto de 2. (El enunciado equivale a afirmar que el número $\sqrt{2}$ es irracional).*

Hipótesis: *$x = \frac{p}{q}$ es un número racional expresado como fracción irreducible.*

Tesis: *El número $\sqrt{2}$ es irracional.*

Demostración. La haremos por el absurdo. Supongamos que $\sqrt{2}$ fuera racional. Entonces lo podríamos escribir como fracción irreducible, y por lo tanto existirían $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ que no tengan divisores comunes tales que:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \boxed{\frac{p^2}{q^2} = 2} \tag{5.3.1}$$

Multiplicando a ambos miembros por q^2 en la ecuación (5.3.1) recuadrada, resulta:

$$p^2 = 2q^2 \tag{5.3.2}$$

Esto último nos indica que p^2 es un número par. Y como el cuadrado de un número es par si y sólo si el número original es par, entonces deducimos que:

$$\boxed{p \text{ es par}} \tag{5.3.3}$$

Si p es par, eso quiere decir que existe un número natural t tal que:

$$p = 2t$$

Reemplazando p por $2t$ en la ecuación (5.3.2), invirtiendo los miembros, resulta:

$$2q^2 = (2t)^2 = 4t^2 \Rightarrow \boxed{q^2 = 2t^2}$$

Pero esto último afirma que q^2 es par. Por la misma razón que ocurrió antes con p, concluimos que:

$$\boxed{q \text{ es par}} \tag{5.3.4}$$

Las ecuaciones (5.3.3) y (5.3.4) nos indican que p y q debieran ser pares simultáneamente, lo que implica que ambos deben ser divisibles por 2. Esto es *absurdo* pues habíamos supuesto que la fracción $\frac{p}{q}$ era *irreducible*, y por lo tanto p y q no pueden tener divisores comunes. El absurdo proviene de haber supuesto que $\sqrt{2}$ era un número racional.

Luego: El número $\sqrt{2}$ *debe ser irracional*, tal como queríamos demostrar.

□

5.3.2. Propiedades de los Logaritmos

Para operar con logaritmos, luego de haber comprendido el sentido de su definición, es necesario sistematizar las propiedades que se fueron deduciendo y agregar algunas que faltaban.Esta propiedad enuncia que el logaritmo del producto de dos números es la suma de los logaritmos de dichos números.

Para una base $b > 0 \in \mathbb{R} \wedge b \neq 1$, la operación logaritmo goza de las siguientes propiedades:

1. $\log_b(1) = 0$. Esta propiedad indica que el logaritmo del número 1 es cero, con independencia de la base b que se utilice.

2. $\log_b(b) = 1$. De acuerdo con la definición de logaritmo, como $b^1 = b$, entonces el logaritmo del número b en base b da como resultado el número 1, cualquiera sea la base b.

3. $b^{\log_b(x)} = x$ para cualquier número $x > 0$.

   Si $\log_b(x) = m$ entonces $b^m = x$ y por lo tanto $b^{\log_b(x)} = x$.

4. $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$, lo que indica que el logaritmo en base b del producto de dos números es la suma de los logaritmos en la misma base de dichos números, cualquiera sea la base b.

   La justificación surge de la definición de logaritmo. Si $\log_b(x) + \log_b(y) = c$ entonces:

   $$b^c = b^{\log_b(x)+\log_b(y)} = b^{\log_b(x)} \cdot b^{\log_b(y)} = x \cdot y$$

   de acuerdo a la propiedad anterior.

5. $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$, que indica que el logaritmo del cociente de dos números es igual a la diferencia entre el logaritmo del numerador y el logaritmo del denominador — *o lo que es lo mismo el logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor*. La justificación es similar al caso anterior, teniendo en cuenta la propiedad de exponenciación de una diferencia de exponentes.

6. $\log_b(x^y) = y \cdot \log_b(x)$, lo que indica que el exponente del argumento de un logaritmo puede colocarse afuera multiplicando al logaritmo.

   De esta propiedad se infiere que cuando el argumento es una raíz $n-$ésima, basta considerar que el radicando está elevado a una potencia fraccionaria, lo que permite sacar dicho exponente como factor del logaritmo del radicando:

   $$\log_b\left(\sqrt[n]{x}\right) = \log_b\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \cdot \log_b(x)$$

   lo que demuestra que el logaritmo de la raíz n-ésima de un número da como resultado $\frac{1}{n}$ por el logaritmo de dicho número.

7. *Propiedad de Cambio de Base:*

   $$\log_m(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(m)}$$

   Si llamamos $c = \log_m(x)$ entonces $m^c = x$ y si aplicamos la operación logaritmo en base b a ambos miembros que figurarán como argumento, obtendríamos:

   $$\log_b(m^c) = \log_b(x)$$

   Aplicando la propiedad 6. podemos escribir:

   $$c \cdot \log_b(m) = \log_b(x)$$

   en donde es posible despejar c para obtener:

   $$c = \frac{\log_b(x)}{\log_b(m)}$$

Reemplazando en la igualdad anterior c por $\log_m(x)$ concluimos que:

$$\log_m(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(m)}$$

siendo esto último lo que queríamos justificar.

Esta propiedad se utiliza cuando se quieren calcular logaritmos de base distinta a 10 o e mediante una calculadora.

Por ejemplo, para calcular $\log_2(7)$, se podrá realizar de la siguiente manera:

$$\log_2(7) = \frac{\log_{10}(7)}{\log_{10}(2)} = \frac{0{,}84509804}{0{,}301029995} = 2{,}807354922 = 2{,}81$$

si sólo se necesitan dos cifras decimales.

A continuación se indican algunos ejemplos utilizando las propiedades anteriores:

1. $\log_2(64)$

   La práctica indica que en este caso es conveniente factorizar el argumento del logaritmo obteniéndose $64 = 2^6$. Aplicando ahora la propiedad 6. obtenemos:

   $$\log_2(64) = \log_2\left(2^6\right) = 6 \cdot \log_2(2) = 6 \cdot 1 = 6$$

2. $\log_2\left(\sqrt{8}\right)$

   En este caso, factorizamos $8 = 2^3$ y utilizamos la propiedad de los exponentes fraccionarios:

   $$\log_2\left(\sqrt{8}\right) = \log_2\left(8^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \log_2(8) = \frac{1}{2} \cdot \log_2\left(2^3\right) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \log_2(2) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{2}$$

3. $\log(1000) - \log(0{,}001) + \log\left(\frac{1}{1000}\right)$

   $$\begin{aligned} \log(1000) - \log(0{,}001) + \log\left(\frac{1}{1000}\right) &= \\ &= \log\left(10^3\right) - \cancel{\log\left(\frac{1}{1000}\right)} + \cancel{\log\left(\frac{1}{1000}\right)} \\ &= 3 \cdot \log(10) = 3 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

4. Sabiendo que $\log(a) = 3$ y $\log(b) = 5$, calcular:

   a) $\log(a \cdot b)$

   $$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b) = 3 + 5 = 8$$

   b) $\log\left(\frac{a}{b}\right)$

   $$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b) = 3 - 5 = -2$$

   c) $\log\left(a^{\log(b)}\right)$

   $$\log\left(a^{\log(b)}\right) = \log(b) \cdot \log(a) = 5 \cdot 3 = 15$$

5.3.3. Antilogaritmos

Dada una base $b > 0$ y $b \neq 1$ se define al *antilogaritmo en base b — en símbolos Alog$_b$* — como la operación inversa al $\log_b(x)$. Si tenemos presente que la operación logaritmo en base b ya de por sí es la operación inversa de la exponenciación en base b, entonces resulta claro entender que el antilogaritmo en base b no es otra cosa que la exponenciación en base b.

Por ejemplo:

1. $\mathrm{Alog}_3(4) = 3^4$ pues $\log_3\left(3^4\right) = 4$.
2. $\mathrm{Alog}(7) = 10^7$ pues $\log\left(10^7\right) = 7$.

Capítulo 6

Números Complejos $\mathbb{C}$

Denominamos ecuaciones a expresiones matemáticas de dos miembros igualados donde figuran variables que en muchos casos se necesitan despejar. Algunas de estas ecuaciones no tienen solución en el conjunto de números reales, como la siguiente:

$$x^2 = -1 \tag{6.0.1}$$

pues ningún número real x elevado al cuadrado nos dará un resultado negativo.

En numerosos problemas de *física*, *electricidad* y *electrónica*, la necesidad de que dichas ecuaciones posean solución resulta imprescindible. Por ende hubo que ampliar el conjunto de números reales a un conjunto numérico más grande que lo contenga, donde ecuaciones como (6.0.1) puedan tener solución., con la propiedad de que

La idea fundamental consistió en introducir un nuevo número que se indica normalmente con las letras "i" o "j" llamado unidad imaginaria que cumple con la siguiente propiedad:

$$j^2 = -1$$

lo que equivale a poder resolver la ecuación planteada en (6.0.1) ya que resultaría $x^2 = j^2$.

Al definirse una nueva unidad imaginaria es necesario introducir las combinaciones de ella con todos los números reales definidos previamente.

El conjunto numérico que surge de multiplicar la unidad imaginaria por un número real b, es decir la expresión $jb\ \forall\, b \in \mathbb{R}$, se denomina conjunto de *números imaginarios puros*. El conjunto de todas las sumas posibles entre números reales y números imaginarios puros da lugar a un nuevo conjunto numérico denominado *conjunto de números complejos*. Cada elemento de este conjunto se define como la suma de un número real a más un número imaginario puro jb, es decir $z = a + jb$ donde a y b son números reales.

El conjunto de números complejos se indica formalmente como:

$$\mathbb{C} = \{a + jb : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$$

es decir incluye todas las combinaciones posibles de la forma $z = a + jb$. El valor del número real a se llama "*parte real de z*" y simbólicamente se indica por $\operatorname{Re}(z)$, y el valor del número real b se llama "*parte imaginaria de z*" y simbólicamente se indica por $\operatorname{Im}(z)$.

Nota: En bibliografía orientada a un enfoque puramente matemático es común encontrar representada a la unidad imaginaria con la letra "i". En nuestra publicación utilizaremos la letra "j" debido a que en aplicaciones ingenieriles es conveniente llamarle de esta manera ya que la letra i se utiliza normalmente en electricidad para indicar corriente eléctrica.

Otra forma de representar un número complejo es indicar entre paréntesis primero la parte real y luego la parte imaginaria sin colocar la "j". Es decir el número complejo $z = a + jb$ escrito en forma de suma puede indicarse también como un *par ordenado* de números reales de la forma $z = (a, b)$.

Por lo tanto todo número complejo se podrá escribir indistamente de cualquiera de las dos formas:

$$z = a + jb = (a, b)$$

Todas las operaciones definidas para números reales se pueden extender al conjunto de los números. Simplemente toda vez que aparezca en alguna expresión j^2, habrá que reemplazar dicho valor por -1.

6.1. Operaciones con Números Complejos

En esta capítulo indicaremos sólo las operaciones básicas ya que para operaciones más complejas se requieren conocimientos de trigonometría, tema que se introduce recién en la PARTE III de este trabajo.

6.1.1. Suma y Resta de Números Complejos

Para sumar o restar números complejos, surge de inmediato que las partes reales se pueden sumar o restar directamente y en las partes imaginarias se puede extraer a la unidad imaginaria j como factor común, sumando o restando según corresponda las partes imaginarias.

Por ejemplo:

$$(2 + j3) + (4 - j2) = (2 + 4) + j\,(3 - 2) = 6 + j$$

$$(2 + j3) - (4 - j2) = (2 - 4) + j\,(3 - (-2)) = -2 + j5$$

6.1.2. Multiplicación de Números Complejos

Para multiplicar dos números complejos $z_1 = a + jb$, $z_2 = c + jd$ el procedimiento se basa en la aplicación de la propiedad distributiva, teniendo presente que cada vez que aparezca j^2 se reemplaza por -1.

Ejemplos:

$$\begin{aligned}(2 + j3) \cdot (4 - j2) &= 8 - j4 + j12 - j^2 6 = 8 + j8 - (-1) \cdot 6 \\ &= 8 + j8 + 6 = 14 + j8\end{aligned}$$

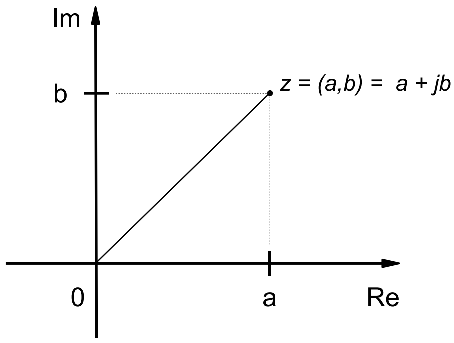
$$\begin{aligned}(3 - j2) \cdot (1 + j) &= 3 + j3 - j2 - j^2 2 = 3 + j - (-1) \cdot 2 \\ &= 3 + j + 2 = 5 + j\end{aligned}$$

6.1.3. Representación gráfica de los Números Complejos

El conjunto de todos los números reales se relacionan biunívocamente con los puntos de una recta que hemos denominado *recta real*. Como las partes real e imaginaria de los números complejos son números reales, cada número complejo se puede representar mediante un par de coordenadas perpendiculares donde se lleve en una a la parte real y en la otra a la parte imaginaria. De esta manera cada punto del plano se representa por un par ordenado de números reales (a, b), donde el primero indica el desplazamiento horizontal medido desde el origen y el segundo indica el desplazamiento vertical, también medido desde el origen. De este modo, cada punto del plano se relaciona biunívocamente con un par ordenado de números reales y de acuerdo a lo indicado anteriormente si tomamos como eje horizontal a la parte real de un número complejo y al eje vertical como la parte imaginaria, ese par ordenado coincide con un número complejo.

Por lo dicho anteriormente, la forma usual de representar el conjunto de números complejos es mediante dos ejes perpendiculares, uno llamado *Eje Real — que generalmente se toma como una recta horizontal* — y el otro llamado *Eje Imaginario — que generalmente se toma como una recta vertical*. En la Fig. 6.1.1 puede observarse la representación de un número complejo cualquiera $z = a + jb = (a, b)$ en un plano construido de esta manera, motivo por el cual cuando se representan números complejos en un plano, se denomina a ese plano Plano Complejo, y se suele indicar con el mismo símbolo que representa al conjunto de números complejos: $\mathbb{C}$.

Figura 6.1.1: El Plano Complejo

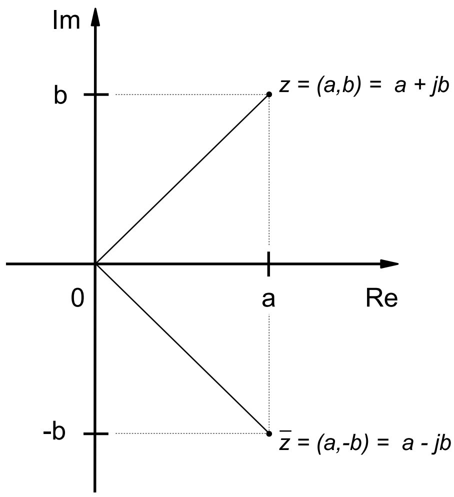


En la figura puede apreciarse la representación en el plano complejo $\mathbb{C}$ de un número complejo cualquiera $z = a + jb = (a, b)$.

6.1.4. Conjugado de un Número Complejo

Dado un número complejo $z = a + jb$, se define al *conjugado* de dicho número como $\overline{z} = a - jb$, es decir es un número que posee la misma parte real y la parte imaginaria cambiada de signo, lo que es fácil de comprender observándolos en el plano complejo:

Figura 6.1.2: Conjugado de un Número Complejo



En la figura puede apreciarse la representación en el plano complejo $\mathbb{C}$ de un número complejo cualquiera $z = a + jb = (a, b)$ y su conjugado $\overline{z} = a - jb = (a, -b)$.

Se define el conjugado de un número complejo pues facilita establecer ciertas relaciones, que veremos a continuación.

1. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\,(z)$

   Se justifica diréctamente efectuando la suma

$$z + \overline{z} = (a + jb) + (a - jb) = 2a = 2\mathrm{Re}\,(z)$$

2. $z - \overline{z} = j2\mathrm{Im}\,(z)$

   Se justifica como la anterior:

$$z - \overline{z} = (a + jb) - (a - jb) = j2b = j2\mathrm{Im}\,(z)$$

3. El producto entre un número complejo z y su conjugado $\overline{z}$ da como resultado un número real que es la suma de los cuadrados de las partes real e imaginaria de z. En símbolos esto es $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$, lo que se justifica utilizando la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (a + jb) \cdot (a - jb) = a^2 + jab - jab - j^2b^2 \\ &= a^2 - (-1) \cdot b^2 = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Veamos algunos ejemplos:

1. Calcular el inverso multiplicativo del número complejo $z = 2 + 3j$.

   Si multiplicamos z por su conjugado $\overline{z}$ obtenemos:

$$(2 + 3j) \cdot (2 - 3j) = 4 + 9 = 13$$

   pero entonces:

$$(2 + 3j) \cdot \left(\frac{2 - 3j}{13}\right) = 1$$

   y esto último quiere decir que:

$$\frac{1}{2 + 3j} = (2 + 3j)^{-1} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}j$$

2. Calcular el inverso multiplicativo del número complejo $z = 1 + j$.

   Nuevamente debemos multiplicar z por su conjugado $\overline{z}$:

$$(1 + j) \cdot (1 - j) = 1 + 1 = 2$$

   para escribir:

$$(1 + j) \cdot \left(\frac{1 - j}{2}\right) = 1$$

   y deducir el inverso multiplicativo de dicha expresión como:

$$\frac{1}{1 + j} = (1 + j)^{-1} = \frac{1 - j}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j$$

6.1.5. División de Números Complejos

Para efectuar la división entre los números complejos $z_1 = a + jb$ y $z_2 = c + jd$ se procede de manera semejante a cuando se reacionalizan raíces en un denominador, lo que se manifiesta en este caso como multiplicar y dividir por el conjugado del denominador:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$$

Dado que $z_2 \cdot \overline{z_2}$ es un número real igual a $c^2 + d^2$, lo anterior resulta:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{c^2 + d^2}$$

Efectuando la operación del numerador:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot \overline{z_2} &= (a + jb) \cdot (c - jd) = ac - jad + jbc - j^2 bd \\ &= (ac + bd) + j\,(bc - ad) \end{aligned}$$

Reemplazando en el cociente de más arriba:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac + bd) + j\,(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

Separando en parte real e imaginaria:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Ejemplos:

1. Calcular la división entre los números complejos $z_1 = 2 - j4$ y $z_2 = 1 + j$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{(2 - j4) \cdot (1 - j)}{1^2 + 1^2} = \frac{2 - j2 - j4 + j^2 4}{2} = \frac{-2 - j6}{2} = -1 - j3$$

2. Efectuar la división entre los números complejos $z_1 = 1 + j$ y $z_2 = 1 - j$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{(1 + j) \cdot (1 + j)}{2} = \frac{1 + j2 - 1}{2} = j$$

6.2. Procesos seguidos para la introducción de conjuntos numéricos

Con los Números Complejos se completan todos los conjuntos numéricos utilizados normalmente, en los que para pasar de uno a otro más abarcativo se fueron incluyendo nuevos tipos de números, necesarios para resolver expresiones matemáticas útiles para modelizar la realidad.

El camino recorrido fue:

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

Cada uno de los elementos de estos conjuntos, se pueden representar como puntos en una recta y en un plano. Los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ y $\mathbb{Z}$ son discretos, mientras que $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son densos. Los primeros cinco se pueden representar sobre una recta, avanzando en los puntos de la recta representables por números hacia el conjunto $\mathbb{R}$ que los incluye a todos. El último requiere su representación en un plano.

La aritmética se ocupa de estudiar las relaciones entre los diferentes números y las operaciones entre sí, cuando se trata de expresiones que contienen números concretos, expresados mayormente de acuerdo al sistema posicional de base diez. Los números concretos los tomamos como *constantes*, que tienen un valor determinado.

Cuando las expresiones incluyen números constantes y letras que simbolizan variables estamos en el caso del álgebra, que se ocupa de las relaciones entre estos objetos y las operaciones.

El correcto manejo de la aritmética y el álgebra facilita la comprensión de los fenómenos de la naturaleza estudiados por las diferentes disciplinas científicas, modelizados mediante expresiones matemáticas.

Parte II

Ecuaciones e Inecuaciones

Capítulo 7

Ecuaciones

7.1. Teoría Básica

7.1.1. Motivación

Numerosos problemas de la vida cotidiana se resuelven planteando ecuaciones, aunque la mayoría de las veces es un proceso que planteamos en forma intuitiva y rara vez nuestro cerebro es consciente de que está resolviendo una ecuación. Para ilustrar el punto, pensemos en la siguiente situación problemática.

Mi amigo Juancito cambió ayer los cuatro neumáticos de su auto y además reemplazó sus llantas comunes por otras modernas de aleación. Me contó al pasar muy asombrado que las llantas que le puso costaron un 30 % más que los neumáticos, y que en total pagó \$4600. Casualmente yo necesito cambiar los neumáticos de mi auto, y justo quiero ponerle el mismo modelo de neumáticos que mi amigo Juan, razón por la cual me sería extremadamente útil conocer el precio de los mismos. Por desgracia mi amigo ya no está conmigo y no le puedo preguntar nada más.

Luego de pensar y pensar me doy cuenta que si divido la suma total de \$4600 en dos partes no iguales según $\$4600 = \$2000 + \$2600$, como \$2600 es 30 % más que \$2000, entonces seguro mi amigo habrá pagado \$500 cada neumático. De esta forma concluyo en forma intuitiva que el precio de cada neumático y de cada llanta es, respectivamente, \$500 y \$650.

Caben ahora hacerse un par de preguntas:

- ¿Es posible arribar al mismo resultado mediante la formulación de alguna ecuación?
- ¿Sería más sencillo e implicaría menos esfuerzo mental aprender a resolver este tipo de problemas mediante el uso de ecuaciones?

La respuesta a ambas preguntas es sin duda alguna afirmativa, y por más que en un principio cueste acostumbrarse al pensamiento matemático — *el cual implica abstraer de una cierta situación problemática una ecuación que permita resolverla* — en la mayoría de los casos proceder de esta forma ahorra un notable esfuerzo mental, y permite abordar la resolución de situaciones problemáticas en forma ordenada y concisa.

Veamos cómo se resolvería el problema de los neumáticos mediante la formulación y resolución de una ecuación. Para empezar, llamemos x al precio de cada neumático. Teniendo en cuenta que las llantas cuestan un 30 % más, entonces cada llanta costaría $x+\frac{30}{100}x$. Si además observamos que tuvo que comprar 4 neumáticos y 4 llantas, entonces la ecuación que gobierna el problema sería:

$$4x + 4\left(x + \frac{3\cancel{0}}{10\cancel{0}}x\right) = 4600$$

No pretendemos aún que el alumno comprenda cabalmente los pasos que realizaremos para resolver esta ecuación, pues de eso se ocupará el resto de la presente sección, pero aplicando la ley distributiva, resulta:

$$4x + 4x + \frac{12}{10}x = 4600$$

Si ahora sumamos todos los términos del lado izquierdo, obtenemos:

$$\frac{92}{10}x = 4600$$

Pero entonces el precio de cada neumático lo recuperamos despejando x:

$$x = 4600 \cdot \frac{10}{92} = 500$$

Como podrá observar el lector, el empleo de técnicas matemáticas a la hora de plantear y resolver una situación problemática, no sólo ahorra esfuerzo mental, sino que permite resolver cuestiones mucho más complejas que las que uno podría resolver de manera intuitiva. ¡Veamos pues de qué se tratan las ecuaciones!

7.1.2. Generalidades

Definición 7.1.1. Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones donde aparecen una o varias incógnitas.

En esta sección estudiaremos las ecuaciones con una incógnita que se representará con una letra, generalmente utilizaremos la letra x.

Ejemplo 7.1.1. Ejemplos de ecuaciones son:

1. $2x + 1 = 6$, que es una ecuación de una sola incógnita.
2. $3x = 1$, que también es una ecuación de una sola incógnita.

Nota Si la igualdad se verifica para todo valor numérico de las incógnitas, no se considera una ecuación. En dicho caso la igualdad se denomina una *identidad*.

Ejemplo 7.1.2.

1. $2(x + 3) = 2x + 6$ es una identidad porque la igualdad se cumple para todo valor numérico de la variable x.
2. $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ también es una identidad.

Definición 7.1.2. Una *solución* de una ecuación de una incógnita es un valor numérico para el cual se verifica la igualdad.

Ejemplo 7.1.3. $x = 2$ es solución de la ecuación $x^3 = 8$, pues $2^3 = 8$.

Ejemplo 7.1.4. $x = 3$ es solución de la ecuación $4x - 2 = 10$, pues $4 \cdot 3 - 2 = 10$.

Resolver una ecuación es calcular el conjunto de todos sus soluciones.

Ejemplo.

- $x^2 - 2 = 14$ tiene por soluciones a $x = -4$ y $x = 4$.
- $3x + 1 = 16$ tiene por única solución a $x = 5$.

Definición 7.1.3. Diremos que dos ecuaciones son *equivalentes* si tienen las mismas soluciones.

Ejemplo.

- Las ecuaciones $6x - 3 = 9$ y $2x - 1 = 3$ son equivalentes porque ambas tienen como única solución a $x = 2$.

- Las ecuaciones $x^2 = 9$ y $5x = 15$ no son equivalentes, pues $x = 3$ es solución de ambas pero la ecuación $x^2 = 9$ tiene además como solución a $x = -3$.

Observación 7.1.1. Generalmente para resolver una ecuación la idea es hallar una ecuación equivalente donde sus soluciones sean más sencillas de determinar.

Para ello, a continuación enunciaremos operaciones que producen ecuaciones equivalentes.

1. *Sumar o restar* en cada miembro de una ecuación una misma expresión.
2. *Multiplicar o dividir* en cada miembro de una ecuación por una misma expresión distinta de cero.

Ejemplo 7.1.5. Resolver la ecuación $2x - 4 = 0$

Utilizando 1 y 2 de la observación 7.1.1 obtenemnos las siguientes ecuaciones equivalentes a $2x-4 = 0$.

$$\begin{aligned}
2x - 4 &= 0 \\
2x - 4 + 4 &= 0 + 4 \leftarrow \text{Usamos la operación 1.} \\
2x &= 4 \\
\frac{1}{2}(2x) &= \frac{1}{2} \cdot 4 \leftarrow \text{Usamos la operación 2.} \\
x &= 2
\end{aligned}$$

Por lo tanto $x = 2$ es la única solución de la ecuación $2x - 4 = 0$.

Verificación de una solución[1] Para verificar la solución anterior sustituiremos por $x = 2$ en la ecuación $2x - 4 = 0$, obteniendo:

$$\begin{aligned}
2 \cdot 2 - 4 &= 0 \\
4 - 4 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Luego: $x = 2$ es efectivamente la solución de la ecuación.

7.1.3. Ecuaciones Lineales

Definición 7.1.4. Una *ecuación lineal* es una ecuación que puede escribirse en la forma $ax + b = 0$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Ejemplo.

- $7x - 3 = 0$ es una ecuación lineal.
- $\sqrt{x} - 2 = 0$ no es una ecuación lineal debido a la presencia de la raíz cuadrada.
- $9x - 10 = 6x + 1$ es una ecuación lineal porque puede escribirse en la forma $3x - 11 = 0$.

Resolución de una ecuación lineal

Supongamos que queremos resolver la ecuación $ax + b = 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

$$\begin{aligned}
ax + b &= 0 \\
ax + b - b &= 0 - b \leftarrow \text{Usamos la operación 1.} \\
ax &= -b \\
\frac{1}{a} \cdot (ax) &= \frac{1}{a} \cdot (-b) \leftarrow \text{Como } a \neq 0\text{, usamos la operación 2.} \\
x &= -\frac{b}{a}
\end{aligned}$$

Entonces la ecuación lineal $ax + b = 0$ tiene como única solución a $x = -\frac{b}{a}$.

Ejemplo 7.1.6. Resuelva la ecuación $5x - 7 = 3x + 8$

$$
\begin{aligned}
5x - 7 &= 3x + 8 \\
5x - 7 - 3x &= 3x + 8 - 3x \leftarrow \text{Restamos } 3x \text{ a ambos miembros.} \\
(5x - 3x) - 7 &= (3x - 3x) + 8 \leftarrow \text{¿Qué propiedades aplicaron?} \\
(5 - 3)\,x - 7 &= 0 + 8 \leftarrow \text{¿Qué propiedades aplicaron?} \\
2x - 7 &= 8 \\
2x - 7 + 7 &= 8 + 7 \leftarrow \text{Sumamos 7 a ambos miembros.} \\
2x &= 15 \\
\frac{1}{2} \cdot 2x &= \frac{1}{2} \cdot 15 \leftarrow \text{Multiplicamos ambos miembros por } \frac{1}{2}. \\
\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) \cdot x &= \frac{15}{2} \leftarrow \text{¿Qué propiedad se aplicó?}
\end{aligned}
$$

Así: la solución de la ecuación $5x - 7 = 3x + 8$ es $x = \frac{15}{2}$.

A continuación analizaremos más a fondo las operaciones realizadas para resolver la ecuación anterior, para lograr una comprensión más cabal del procedimiento realizado en relación al pasaje de términos y factores de un miembro al otro, que es lo que se utiliza normalmente al trabajar con expresiones matemáticas de todo tipo y habitualmente se lo realiza como un automatismo cuando se adquiere práctica en problemas de esta índole.

Al resolver la ecuación anterior, es necesario destacar los razonamientos que siguen:

Partimos de la ecuación:

$$5x - 7 = 3x + 8$$

Al aplicar la operación 1, restando el termino [$3x$] a ambos miembros se ve rápidamente que en el segundo miembro se puede eliminar términos que contengan la incógnita [x] ya que nos queda en el mismo miembro la operación [$3x - 3x$] que da por resultado cero:

$$5x - 7 - 3x = 3x + 8 - 3x$$

Operando en el 2° miembro resulta:

$$5x - 7 - 3x = 8$$

Resulta fácil observar que al restar [$3x$] en ambos miembros, se elimina del 2° miembro el término dependiente de la incógnita [x] y en el 1° aparece restando el término [$3x$]. Esta operación *es equivalente a pasar* el término [$3x$] que posee signo positivo en el 2° miembro al 1° pero *con signo cambiado*, es decir con signo negativo o restando.

El paso siguiente consiste en operar en el primer miembro con los términos [$5x$] y [$-3x$], sacando por ejemplo la incógnita [x] como factor común, que equivale a restar los *coeficientes* de [x]:

$$
\begin{aligned}
(5 - 3)\,x - 7 &= 8 \\
2x - 7 &= 8
\end{aligned}
$$

A continuación se observa que sumando un término de valor [+7] en ambos miembros de la igualdad, se eliminan los términos [−7] y [+7] del primer miembro, quedando en el segundo el término numérico que había [+8], al que se le suma el término [+7]. Análogamente a lo expresado anteriormente, la operación de sumar [+7] en ambos miembros *es equivalente a pasar* el término [7] que posee signo negativo en el primer miembro al segundo miembro de la igualdad con signo positivo, es decir *con signo contrario*, resultando:

$$2x = 8 + 7$$
$$2x = 15$$

Por último, para *despejar* el valor de la incógnita [x], debemos realizar una operación que nos permita *eliminar* el coeficiente [x], que en este caso es [2]. Resulta inmediato que si se multiplica el primer miembro por un factor $\left[\frac{1}{2}\right]$, el [2] del numerador del coeficiente del primer miembro se simplifica con el [2] del denominador del mismo.

Por supuesto para que la igualdad no altere, al multiplicar por $\left[\frac{1}{2}\right]$ al primer miembro, también habrá que hacerlo en el 2°:

$$2x \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

Al simplificar el [2] del numerador y denominador que multiplica y divide a [x] en el primer miembro, resulta:

$$x = \frac{15}{2}$$

Nuevamente podemos *interpretar la operación* anterior como un *pasaje de miembro*, pero en este caso de un factor [2] que *multiplica* a la incógnita [x] en el primer miembro a un factor [2] que *divide* al término del 2° miembro, es decir que siempre *un factor que multiplica al resto de los términos del primer miembro*, puede *pasar al segundo dividiendo a todos sus términos*.

7.1.4. Ecuaciones Cuadráticas

Definición 7.1.5. Una *ecuación cuadrática* es una ecuación que puede escribirse en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b, $c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Ejemplo.

- $3x^2 + 2x - 1 = 0$ es una ecuación cuadrática, con $a = 3$, $b = 2$, $c = -1$.
- $x^2 - 2 = 0$ es una ecuación cuadrática, con $a = 1$, $b = 0$ y $c = -2$.
- $x - 2 = 0$ no es una ecuación cuadrática.

Observación 7.1.2. En una ecuación cuadrática pueden pasar tres cosas:

1. No tiene soluciones reales.
2. Tiene exactamente una solución real.
3. Tiene exactamente dos soluciones reales.

Ejemplo 7.1.7.

1. $x^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones reales.
2. $x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene como única solución a $x = 1$.
3. $x^2 - 4 = 0$ tiene como únicas soluciones a $x = -2$ y $x = 2$.

Resolución de ecuaciones cuadráticas

Si tenemos la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, las soluciones reales — *si es que existen* — son de la forma:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad\qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Generalmente se suele utilizar la siguiente notación:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \tag{7.1.1}$$

denominada *fórmula resolvente* de la ecuación cuadrática.

Observación 7.1.3. Observemos que la fórmula resolvente involucra una raíz cuadrada, lo cual nos indica que para que la ecuación tenga al menos una solución debe ocurrir necesariamente que $b^2 - 4ac \geq 0$ para que se puede efectuar la operación raíz cuadrada.

Definición 7.1.6. La expresión $b^2 - 4ac$ se denomina *discriminante*. Tenemos tres casos posibles:

1. Si $b^2 - 4ac > 0$ entonces hay dos soluciones reales distintas, que son las dadas por la fórmula resolvente (7.1.1).
2. Si $b^2 - 4ac = 0$ entonces hay una única solución real, que también se halla mediante la fórmula resolvente.
3. Si $b^2 - 4ac < 0$ entonces la ecuación no tiene soluciones reales.

Ejemplo 7.1.8. Verifiquemos que nuestras afirmaciones del ejemplo 7.1.7 son correctas.

1. $x^2 + 1 = 0$

   En este caso $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, entonces $b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 - 4 = -4$.

   Luego $b^2 - 4ac < 0$ y por lo tanto no hay soluciones reales.

2. $x^2 - 2x + 1 = 0$

   En este caso $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$, entonces $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$.

   Como $b^2 - 4ac = 0$ entonces hay una única solución real, y la solución es:

   $$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

   Luego: La única solución es $x = 1$.

3. $x^2 - 4 = 0$

   En este caso $a = 1$, $b = 0$, $c = -4$, entonces $b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 0 + 8 = 8$.

   Es decir $b^2 - 4ac > 0$ y esto nos dice que las soluciones son:

   $$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{0 \pm \sqrt{16}}{2} \\ &= \frac{\pm 4}{2} \\ &= \pm 2 \end{aligned}$$

Luego: Las soluciones de la ecuación son $x = -2$ y $x = 2$.

Definición 7.1.7. Al conjunto de soluciones de una ecuación lo llamaremos *conjunto solución* y lo notaremos con la letra $\mathcal{S}$.

Cuando la ecuación no tenga solución diremos que el conjunto solución es vacío y lo notaremos como $\mathcal{S} = \emptyset$.

En el ejemplo anterior:

1. $x^2 + 1 = 0$, entonces $\mathcal{S} = \emptyset$.
2. $x^2 - 2x + 1 = 0$, entonces $\mathcal{S} = \{1\}$.
3. $x^2 - 4 = 0$, entonces $\mathcal{S} = \{-2, 2\}$.

7.2. Ejercicios

En este momento usted forma parte de un grupo de trabajo. Resuelva las siguientes situaciones problemáticas en forma grupal, planteando sus dudas, inquietudes y respuestas posibles. Frente a una situación que requiera un planteo, discuta con sus compañeros el mismo, para comparar sus ideas con las del resto de los integrantes.

1. Determine si los siguientes pares de ecuaciones son equivalentes, justificando sus respuestas. Discuta sus conclusiones con sus compañeros de grupo.
   a) $x = 8$ y $2x + 4 = 20$.
   b) $x = 10$ y $10 + x = 0$.
   c) $5x - (x - 2) = 5$ y $4x = 3$.
   d) $x(x - 1) = 0$ y $2x = x - 1$.
   e) $2x^2 + 4x = -2$ y $2(x + 1)^2 = 0$.
2. Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones. Verifique con sus compañeros de grupo.
   a) $7x - 3 = 0$.
   b) $6x + 2 = 3x - 5$.
   c) $3(x + 1) - 2 = -(x + 1) + 2$.
   d) $\frac{5}{8}x + \frac{3}{8} = -\frac{1}{4}$.
   e) $x - (2 - x) = 5(x + 1) + x$.
3. Halle $c \in \mathbb{R}$ de modo que $4x - 3c = 4x + 6$ sea una identidad.
4. Halle $c \in \mathbb{R}$ de modo que $(x + 1)(x + c) = x^2 - 2x + c$ sea una identidad.
5. Halle $c \in \mathbb{R}$ de modo que la solución de la ecuación $10x - 3c = 2x - c$ sea $x = 2$.
6. Halle $c \in \mathbb{R}$ de modo que $6 - x = 2$ y $2x + 4c = -1$ sean equivalentes.
7. Un revendedor compra una cierta cantidad de manzanas a \$6 el kilo. Se le pudren 3 Kg. y el resto los vende a \$10 el Kg. ¿Qué cantidad considera usted que compró si obtuvo una ganancia de \$50?
8. Trabajando sola, una bomba A puede llenar un tanque en 2 horas y una bomba B puede llenar el mismo tanque en 3 horas. Determine que tan rápido pueden llenar el tanque, si las bombas trabajan juntas.
9. José promedió sus notas de matemática, física y química y el resultado le dio 7. En matemática obtuvo 2 puntos más que en física. Y en química 1 punto menos que en matemática. ¿Qué nota obtuvo en cada materia?

10. Halle el conjunto solución de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

    a) $3x^2 - 24x = 0$.
    b) $x^2 - 6x = -9$.
    c) $2x^2 - 1 = 0$.
    d) $8x(x + 2) - 2 = 2(8x - 1)$.
    e) $x^2 + 3x + 4 = 1$.
    f) $(x - 3)(x + 2) = 0$.

11. Halle los valores de b de modo que la ecuación $2x^2 + bx - 1 = -3$ tenga una única solución y encuentre la solución en cada caso.

12. ¿Cuánto mide el lado más chico de una habitación rectangular si el lado más largo mide 1m más y su superficie es de 12m^2?

13. Un campo rectangular que es 20m más largo que ancho está circundado de exactamente 100m de cercado. ¿Cuáles son las dimensiones del campo?

14. El perímetro de un rectángulo es de 50cm y el ancho es $\frac{2}{3}$ de la altura. Encuentre las dimensiones del rectángulo.

15. El lado mayor de un triángulo es 4cm más largo que el lado menor. El tercer lado tiene 14cm menos que el triple de la longitud del lado menor. Si el perímetro es de 30cm: ¿Cuál es la longitud de cada lado?

7.3. Teoría Complementaria

7.3.1. Factorización de una ecuación cuadrática

Si tenemos la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ y x_1, x_2 son sus soluciones, podemos escribirla del siguiente modo:

$$2(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Ejemplo 7.3.1.

1. $x^2 - 4 = 0$ tiene como soluciones a $x = -2$ y $x = 2$, entonces podemos escribirla como:

$$1(x - 2)(x + 2) = 0$$

2. $x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene como única solución a $x = 1$, entonces podemos escribirla como:

$$1(x - 1)(x - 1) = 0$$

es decir como:

$$(x - 1)^2 = 0$$

Problema 7.3.1. Resuelva la ecuación $(x - 1)(x + 7) = 0$.

Solución

Queremos resolver la ecuación $(x - 1)(x + 7) = 0$, es decir, buscamos qué valores reales debe tomar x de manera que valga la igualdad.

Observemos que si tengo el producto de 2 números reales, dicho producto es cero solamente si por lo menos uno de ellos es cero. Entonces:

$$(x - 1)(x - 7) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \lor x - 7 = 0$$

Luego: $x = 1$ o $x = 7$, y por lo tanto, $x = 1$ y $x = 7$ son las soluciones de la ecuación original.

7.3.2. Valor absoluto o módulo

Definición 7.3.1. El *valor absoluto o módulo* de un número real x, se simboliza por $|x|$ y se define de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{, si } x \geq 0 \\ -x & \text{, si } x < 0 \end{cases}$$

Es decir, el módulo de un número real es igual al mismo número si dicho número es cero o positivo, o a su opuesto si dicho número es negativo.

Ejemplo.

$$\begin{aligned} |2| &= 2, \text{ pues } 2 > 0. \\ |-3| &= -(-3) = 3, \text{ pues } -3 < 0. \\ |0| &= 0 \\ |-5-1| &= |-6| = -(-6) = 6 \end{aligned}$$

7.3.3. Propiedades del módulo

1. Si $a \neq 0$ entonces $|a| > 0$.
2. $|a| = |-a|$.
3. $|ab| = |a|\,|b|$.
4. Si $b \neq 0$, entonces $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.
5. Desigualdad triangular: $|a+b| \leq |a| + |b|$.
6. $-|a| \leq a \leq |a|$.
7. $|a^n| = |a|^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
8. $|a| \underset{(\leq)}{<} b$ si y sólo si $-b \underset{(\leq)}{<} a \underset{(\leq)}{<} b$.
9. $|a| \underset{(\geq)}{>} b$ si y sólo si $a \underset{(\geq)}{>} b$ o $a \underset{(\leq)}{<} -b$.
10. $|a| = b$ si y sólo si $a = b$ o $a = -b$.
11. $|x| = \sqrt{x^2}$. O más generalmente:

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x & \text{, si } n \text{ es impar.} \\ |x| & \text{, si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

7.3.4. Distancia entre dos puntos de la recta real

Si a y b son dos números de la recta real $\mathbb{R}$, se define la *distancia entre a y b* como el valor absoluto de la diferencia entre a y b. Es decir:

$$d(a,b) = |b-a| = |a-b|$$

Observemos que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $|x| = |x-0| = d(x,0)$. Es decir que si $x \in \mathbb{R}$ cualquiera, podemos pensar que su valor absoluto representa la distancia de dicho número x al cero.

Problema 7.3.2. Resolver la ecuación $4x^2 - 7 = 1$.

Solución: Procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 7 &= 1 \\ 4x^2 &= 8 \\ x^2 &= 2 \\ \sqrt{x^2} &= \sqrt{2} \\ |x| &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos utilizado la propiedad 11.

Es decir las soluciones son — *según la propiedad 10*: $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$.

Capítulo 8

Inecuaciones

8.1. Teoría Básica

Definición 8.1.1. Una *inecuación* es una desigualdad entre dos expresiones en las que aparecen una o más incógnitas.

Estudiaremos las inecuaciones con una sola incógnita, a la que generalmente simbolizaremos con la letra x, como hicimos en la sección 7.

Ejemplo 8.1.1.

1. $2x - 3 > 5$.
2. $3x - 1 \leq 2x + 8$.
3. $x^2 > 3$.

Definición 8.1.2. Una *solución* de una inecuación es un valor que cuando se lo sustituye por la variable en la misma, hace que la inecuación se verifique.

Ejemplo 8.1.2. En la inecuación $2x - 3 > 5$, $x = 5$ es una solución, pues $2 \cdot 5 - 3 > 5$, ya que $7 > 5$.

Observación. Análogamente a como resolvíamos ecuaciones, para resolver una inecuación la idea es hallar una inecuación equivalente donde sus soluciones sean más sencillas de determinar.

8.1.1. Operaciones que producen inecuaciones equivalentes

1. Si $a \underset{(\leq)}{<} b$ entonces $a + c \underset{(\leq)}{<} b + c$.
2. Si $a \underset{(\leq)}{<} b$ y $c > 0$, entonces $ac \underset{(\leq)}{<} bc$.
3. Si $a \underset{(\leq)}{<} b$ y $c < 0$, entonces $ac \underset{(\geq)}{>} bc$.

Veamos algunos ejemplos:

- Un ejemplo de aplicación de la primera propiedad:

$$3 < 5 \ \wedge \ 2 \in \mathbb{R} \Rightarrow 3 + 2 < 5 + 2$$

- Otro ejemplo donde aplicamos la primera propiedad:

$$1 < 2 \ \wedge \ -1 \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 + (-1) < 2 + (-1)$$

Observación importante: Cuando multiplicamos en una inecuación por un número negativo en ambos miembros, la tercera propiedad nos indica que debemos invertir la relación de orden. Olvidarse de invertir dicha relación es uno de los errores más comunes que se cometen al resolver una inecuación.

- Un ejemplo de aplicación de la segunda propiedad sería:

$$3 < 7 \ \wedge\ 2 > 0 \Rightarrow 3 \cdot 2 < 7 \cdot 2$$

- Y un par de ejemplos de aplicación de la tercer propiedad sería:

$$3 < 7 \ \wedge\ -1 < 0 \Rightarrow 3 \cdot (-1) > 7 \cdot (-1)$$

$$-1 < 0 \ \wedge -1 < 0 \Rightarrow (-1) \cdot (-1) > (-1) \cdot 0$$

donde observemos que como esta vez multiplicamos ambos miembros por números negativos, fue necesario invertir la relación de orden.

8.1.2. Inecuaciones Lineales

Definición 8.1.3. Una *inecuación lineal* es una inecuación que puede escribirse en la forma $ax + b < 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$, y $a \neq 0$.

Nota: Si reemplazamos a la relación de orden $<$ por $\leq$, $>$ o $\geq$, la inecuación resultante también se llama inecuación lineal.

Ejemplo 8.1.3. Resolver la inecuación lineal $8x - 3 < 7 + 5x$

Solución:

Aplicando las operaciones que preservan la equivalencia de las inecuaciones — *ver sección 8.1.1* — procedemos como sigue:

$$\begin{aligned}
8x - 3 &< 7 + 5x \\
8x - 3 + 3 &< 7 + 5x + 3 \\
8x &< 10 + 5x \\
8x - 5x &< 10 + 5x - 5x \\
3x &< 10 \\
\frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}x &< \frac{1}{3} \cdot 10 \\
x &< \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

Así: La inecuación tiene infinitas soluciones, que son los números reales menores que $\frac{10}{3}$, es decir el intervalo $\left(-\infty, \frac{10}{3}\right)$.

Ejemplo 8.1.4. Resolver la inecuación lineal $\frac{1}{2} - 4x \leq \frac{7}{2}$.

Solución:

Aplicando las operaciones que preservan la equivalencia de las inecuaciones — *ver sección 8.1.1* — procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - 4x - \frac{1}{2} &\leq \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \\ -4x &\leq 3 \\ \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-4x) &\geq \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 3 \\ x &\geq -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Así: La inecuación tiene infinitas soluciones, que son los números reales mayores o iguales que $-\frac{4}{3}$, es decir el intervalo $\left[-\frac{4}{3}, +\infty\right)$.

8.1.3. Intervalos

Definición 8.1.4. Si a, $b \in \mathbb{R}$ son tales que $a < b$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$ se llama *intervalo abierto*. Lo notamos:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$$

Este conjunto representa a todos los números reales que son estrictamente mayores que "a" y estrictamente menores que "b" simultáneamente.

Ejemplo.

$$(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}/0 < x < 1\}$$
$$(-1, 2) = \{x \in \mathbb{R}/ - 1 < x < 2\}$$

El paréntesis en cada extremo de un intervalo abierto (a, b) indica que a y b no pertenecen al intervalo.

Definición 8.1.5. Si a, $b \in \mathbb{R}$ son tales que $a \leq b$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}$ se llama *intervalo cerrado* y lo notamos:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}$$

Este conjunto describe todos los números reales que son mayores o iguales que "a" y menores o iguales que "b" simultáneamente.

Ejemplo.

$$[1, 2] = \{x \in \mathbb{R}/1 \leq x \leq 2\}$$
$$[-1, 0] = \{x \in \mathbb{R}/ - 1 \leq x \leq 0\}$$

El corchete en cada extremo de un intervalo cerrado $[a, b]$ indica que a y b pertenecen al intervalo, lo cual no sucedía en el intervalo abierto (a, b).

Definición 8.1.6. Si a, $b \in \mathbb{R}$ son tales que $a < b$, los conjuntos $\{x \in \mathbb{R}/a \leq x < b\}$ y $\{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\}$ se llaman *intervalos semiabiertos* y los notamos como sigue:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x < b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\}$$

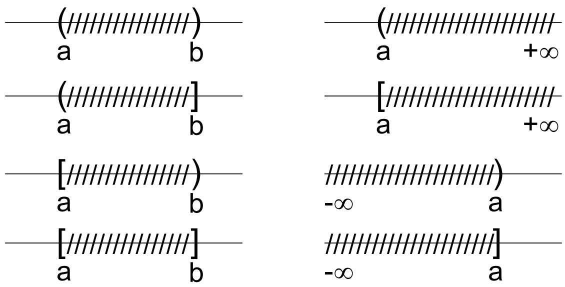
Se llaman *semiabiertos* porque hay un paréntesis en sólo uno de los extremos, es decir uno de los extremos pertenece al conjunto, pero el otro no.

Ejemplo.

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right) = \left\{x \in \mathbb{R}/\frac{1}{2} \leq x < 1\right\}$$
$$(0, 3] = \{x \in \mathbb{R}/0 < x \leq 3\}$$

es un intervalo semiabierto. El corchete indica cual es el extremo que pertenece al intervalo y el paréntesis indica cual es el extremo que no pertenece al intervalo.

Figura 8.1.1: Representación de Intervalos



En la siguiente figura pueden apreciarse los distintos tipos de intervalos. La presencia de un paréntesis indica que el extremo no pertenece al mismo, mientras que la presencia de un corchete indica que el extremo pertenece. A la izquierda se encuentran los intervalos denominados *finitos o acotados*. A la derecha se encuentran los intervalos denominados *infinitos*.

Definición 8.1.7. Si $a \in \mathbb{R}$, los conjuntos $\{x \in \mathbb{R}/x < a\}$, $\{x \in \mathbb{R}/x \leq a\}$, $\{x \in \mathbb{R}/ > a\}$ y $\{x \in \mathbb{R}/x \geq a\}$ se llaman *intervalos infinitos*. Los notamos:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}/x < a\}$$
$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}/x \leq a\}$$
$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}/x > a\}$$
$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}/x \geq a\}$$

En la notación utilizamos los símbolos $-\infty$, leído *menos infinito*, y $+\infty$, leído *más infinito*.

Nota: Estos símbolos no representan números reales. Por ejemplo, $(-\infty, 3)$ representa el conjunto de los números reales menores a 3.

8.1.4. Representación gráfica de intervalos

Para graficar un conjunto de números reales, señalamos de alguna manera en la recta de números reales los puntos que corresponden al conjunto en cuestión. En el caso de los intervalos, los graficamos conforme lo muestra la Fig. 8.1.1.

8.1.5. Representación del conjunto solución de una inecuación

Ahora que dimos la definición de intervalos, podemos representar al conjunto solución de una inecuación.

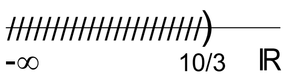
Ejemplo 8.1.5. Recordemos la inecuación del Ejemplo 8.1.3 $8x - 3 < 7 + 5x$. Representaremos su conjunto solución.

Habíamos visto que la solución eran todos los números reales menores que $\frac{10}{3}$.

Entonces:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}/x < \frac{10}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{10}{3}\right)$$

y su gráfico es:



Ejemplo 8.1.6. Recordemos la inecuación del Ejemplo 8.1.4 $\frac{1}{2} - 4x \leq \frac{7}{2}$. Representaremos su conjunto solución.

Habíamos visto que la solución eran todos los números mayores o iguales a $-\frac{4}{3}$.

Entonces:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \geq -\frac{4}{3} \right\} = \left[-\frac{4}{3}, +\infty \right)$$

y su gráfico es:

8.1.6. Inecuaciones simultáneas

Ejemplo 8.1.7. Resuelva $-6 \leq 3x + 1 < 19$.

Queremos que se satisfagan las inecuaciones:

$$-6 \leq 3x + 1 \tag{8.1.1}$$

$$3x + 1 < 19 \tag{8.1.2}$$

simultáneamente. Entonces resolvemos cada inecuación por separado y luego intersecamos los conjuntos solución de cada una para obtener el conjunto solución de la inecuación simultánea.

Resolvemos (8.1.1):

$$\begin{aligned} -6 &\leq 3x + 1 \\ -6 - 1 &\leq 3x + 1 - 1 \\ -7 &\leq 3x \\ \frac{1}{3} \cdot (-7) &\leq \frac{1}{3} \cdot (3x) \\ -\frac{7}{3} &\leq x \end{aligned}$$

Resolvemos (8.1.2):

$$\begin{aligned} 3x + 1 &< 19 \\ 3x + 1 - 1 &< 19 - 1 \\ 3x &< 18 \\ \frac{1}{3} \cdot (3x) &< \frac{1}{3} \cdot 18 \\ x &< 6 \end{aligned}$$

El conjunto solución de (8.1.1) es:

$$S_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \geq -\frac{7}{3} \right\} = \left[-\frac{7}{3}, +\infty \right)$$

y el conjunto solución de (8.1.2) es:

$$S_2 = \{ x \in \mathbb{R} / x < 6 \} = (-\infty, 6)$$

Entonces el conjunto solución de la inecuación simultánea es:

$$S = S_1 \cap S_2 = \left[-\frac{7}{3}, +\infty \right) \cap (-\infty, 6) = \left[-\frac{7}{3}, 6 \right)$$

Nota: Generalmente las inecuaciones simultaneas se suelen escribir con el número menor a la izquierda. Por ejemplo, pese a que escribir $3 > x > 1$ sea técnicamente correcto, se suele escribir $1 < x < 3$.

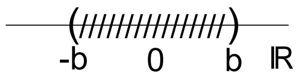
8.1.7. Inecuaciones con valor absoluto o módulo

Recuerde que en la sección 7.3.2 en la pág. 101 definimos el módulo o valor absoluto de un número real x representado como $|x|$. Vimos que $|x| = d(x,0)$ representa la distancia de x al origen en la recta de números reales.

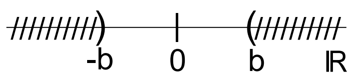
Por ejemplo, $|x| = 3$ significa que la distancia de x al origen es 3, por lo tanto $x = -3$ o $x = 3$.

También dimos propiedades del valor absoluto, en particular recordaremos las siguientes 2 propiedades, siendo b un número real positivo:

1. $|x| < b$ si y sólo si $-b < x < b$.
   La gráfica de la inecuación $|x| < b$ es:



2. $|x| > b$ si y sólo si $x > b$ o $x < -b$.
   La gráfica de la inecuación $|x| > b$ es:



Nota: Estas propiedades también son válidas para las relaciones de orden $\leq$ y $\geq$.

Ejemplo 8.1.8. Resuelva $|5x + 1| < 4$ y grafique la solución.

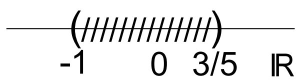
Solución:

Si realizamos la identificación $y = 5x + 1$, tenemos que $|5x + 1| < 4$ si y sólo si $|y| < 4$, lo cual ocurre si y sólo si $-4 < y < 4$.

Resolviendo simultáneamente las dos inecuaciones, se tiene:

$$\begin{array}{ccc}
-4 < 5x + 1 & \qquad & 5x + 1 < 4 \\
-4 - 1 < 5x + 1 - 1 & & 5x + 1 - 1 < 4 - 1 \\
-5 < 5x & & 5x < 3 \\
\frac{1}{5} \cdot (-5) < \frac{1}{5} \cdot (5x) & & \frac{1}{5} \cdot (5x) < \frac{1}{5} \cdot 3 \\
-1 < x & & x < \frac{3}{5}
\end{array}$$

El conjunto solución será pues $-1 < x < \frac{3}{5}$, es decir el intervalo $\left(-1, \frac{3}{5}\right)$, y su representación gráfica es:



Ejemplo 8.1.9. Resuelva $\left|3 - \frac{1}{2}x\right| \geq 6$ y grafique la solución.

Solución:

Si realizamos la identificación $y = 3 - \frac{1}{2}x$, tenemos que $\left|3 - \frac{1}{2}x\right| \geq 6$ si y sólo si $|y| \geq 6$, lo cual ocurre si y sólo si $y \geq 6$ o $y \leq -6$.

Resolviendo simultáneamente las dos inecuaciones, se tiene:

$$\begin{array}{cc}
3-\dfrac{1}{2}x \geq 6 & 3-\dfrac{1}{2}x \leq -6 \\
3-\dfrac{1}{2}x-3 \geq 6-3 & 3-\dfrac{1}{2}x-3 \leq -6-3 \\
-\dfrac{1}{2}x \geq 3 & -\dfrac{1}{2}x \leq -9 \\
(-2)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}x\right) \leq (-2)\cdot 3 & (-2)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}x\right) \geq (-2)\cdot(-9) \\
x \leq -6 & x \geq 18
\end{array}$$

El conjunto solución será pues $x \leq -6$ o $x \geq 18$, es decir:

$$S = (-\infty, -6] \cup [18, +\infty)$$

que es una unión de intervalos, y se representa gráficamente según:

Nota: A diferencia del ejemplo anterior, en este caso se toma la unión de los conjuntos solución de cada una de las inecuaciones en lugar de la intersección, porque se debe satisfacer la primera inecuación o la segunda inecuación, y no las dos simultáneamente, como ocurrió en el ejemplo anterior.

Ejemplo 8.1.10. Resuelva $|7x-2| \leq 0$.

Solución:

Observemos que como el valor absoluto de un número real nunca es negativo, tenemos que $|7x-2| \leq 0$ si y sólo si $|7x-2| = 0$.

Entonces la única solución de la inecuación es $x = \frac{2}{7}$. Por lo tanto el conjunto solución es:

$$S = \left\{\frac{2}{7}\right\}$$

8.1.8. Inecuaciones cuadráticas

Definición 8.1.8. Una *inecuación cuadrática* es una inecuación que puede escribirse en la forma $ax^2+bx+c<0$, con a, $b\,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Si reemplazamos a la relación de orden $<$ por $\leq$, $>$ o $\geq$, la inecuación resultante también se llama *inecuación cuadrática*.

Ejemplo.

1. $3x^2-2x \leq 3$ es una inecuación cuadrática porque puede escribirse en la forma $3x^2-2x-3 \leq 0$.
2. $(x+3)(x-1) \geq 0$ es una inecuación cuadrática porque puede escribirse en la forma $x^2+2x-3 \geq 0$.

Para resolver inecuaciones cuadráticas son de gran utilidad las siguientes propiedades de los números reales:

- El producto de dos números reales es positivo si y sólo si ambos tienen el mismo signo, es decir, si ambos son positivos o si ambos son negativos. En símbolos esto es:

$$A\cdot B>0 \Leftrightarrow (A>0 \ \wedge\ B>0) \vee (A<0 \ \wedge\ B<0) \qquad (8.1.3)$$

- El producto de dos números reales es negativo si y sólo si ambos tienen signos opuestos, es decir, si el primero es positivo y el segundo negativo, o bien si el primero es negativo y el segundo positivo. En símbolos esto es:
$$A \cdot B < 0 \Leftrightarrow (A > 0 \ \wedge \ B < 0) \vee (A < 0 \ \wedge \ B > 0) \tag{8.1.4}$$

- El producto de dos números reales es cero si y sólo si alguno de ellos es cero. En símbolos esto es:
$$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \ \vee \ B = 0 \tag{8.1.5}$$

Ejemplo 8.1.11. Resuelva $(x-1)(x+2) \geq 0$.

Solución:

Utilizando las propiedades enunciadas anteriormente, para que el producto sea mayor o igual a 0, debe ocurrir que ambas expresiones tengan el mismo signo. Esto es:

$$\left[\left|\begin{array}{r} x-1 \geq 0 \\ x \geq 1 \end{array}\right| \wedge \left|\begin{array}{r} x+2 \geq 0 \\ x \geq -2 \end{array}\right|\right] \vee \left[\left|\begin{array}{r} x-1 \leq 0 \\ x \leq 1 \end{array}\right| \wedge \left|\begin{array}{r} x+2 \leq 0 \\ x \leq -2 \end{array}\right|\right]$$
$$x \in [1, +\infty) \qquad \vee \qquad x \in (-\infty, -2]$$

y por lo tanto, el conjunto solución es:

$$S = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$$

Nota: Se unen las soluciones porque los intervalos son disjuntos.

Ejemplo 8.1.12. Resuelva $x^2 - 2x - 3 < 0$.

Solución:

Primero resolvemos la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$ con el objetivo de factorizar la inecuación.

El lector puede verificar utilizando la fórmula resolvente que las soluciones de la ecuación son $x = -1$ y $x = -3$, de donde podemos escribir:

$$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x+3)$$

Entonces $x^2 - 2x - 3 < 0$ si y sólo si $(x+1)(x+3) < 0$. Utilizando las propiedades descriptas antes del primer ejemplo, debe ocurrir que $x+1$ y $x+3$ tengan signos opuestos, por lo tanto procedemos como sigue:

$$\left[\left|\begin{array}{r} x+1 < 0 \\ x < -1 \end{array}\right| \wedge \left|\begin{array}{r} x+3 > 0 \\ x > -3 \end{array}\right|\right] \vee \left[\left|\begin{array}{r} x+1 > 0 \\ x > -1 \end{array}\right| \wedge \left|\begin{array}{r} x+3 < 0 \\ x < -3 \end{array}\right|\right]$$
$$x \in (-3, -1) \qquad \vee \qquad x \in \emptyset \leftarrow \text{No hay solución.}$$

y por lo tanto, el conjunto solución es:
$$S = (-3, -1)$$

8.1.9. Inecuaciones Racionales

Si bien más adelante dedicaremos una sección al estudio de funciones polinómicas, presentaremos a continuación una breve definición de lo que es un polinomio, pues para el estudio de inecuaciones racionales es necesario conocerla.

Definición 8.1.9. Un polinomio $P(x)$ con coeficientes reales es una expresión algebraica de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde:
$$a_i \in \mathbb{R} \, \forall \, 0 \leq i \leq n$$

Al conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales lo notaremos $\mathbb{R}[x]$.

Ejemplo. Ejemplos de polinomios son:

1. $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 1$.
2. $Q(x) = \sqrt{2}x^5 + 3x^2 + 1$.
3. $T(x) = \frac{1}{2}x^7 - 3x^5 + \sqrt{2}x + 1$.

Definición 8.1.10. Una *inecuación racional* es una inecuación que puede llevarse a la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios con coeficientes reales. También son inecuaciones racionales aquellas donde la relación de orden es $\leq$, $>$ o $\geq$.

Veamos algunos ejemplos:

$$\frac{3}{x+3} < 0 \qquad \frac{2x-1}{5} < 0$$
$$\frac{2}{3x^2+6x-1} > 0 \qquad \frac{\frac{1}{2}x^2+5x}{3} \geq 0$$
$$\frac{x+3}{7x^2+4} \leq 0 \qquad \frac{x^2+1}{2x^2} < 0$$

Para resolver una inecuación racional nos serán de gran utilidad las siguientes propiedades de números reales:

- El cociente de dos números reales es positivo si ambos tienen el mismo signo. En símbolos esto es:

$$\frac{A}{B} > 0 \Leftrightarrow (A > 0 \wedge B > 0) \vee (A < 0 \wedge B < 0) \tag{8.1.6}$$

- El cociente de dos números reales es negativo si tienen signos opuestos. En símbolos esto es:

$$\frac{A}{B} < 0 \Leftrightarrow (A > 0 \wedge B < 0) \vee (A > 0 \wedge B < 0) \tag{8.1.7}$$

Ejemplo 8.1.13. Resuelva la inecuación:

$$\frac{x+1}{x+2} < 0$$

Solución:

En primer lugar observemos que $x \neq -2$, pues si $x = -2$ el denominador del cociente sería cero, lo cual no es correcto porque la división por cero no está definida. Entonces buscamos los $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ que son solución de la inecuación.

Utilizando las propiedades enunciadas anteriormente, para que:

$$\frac{x+1}{x+2} < 0$$

es necesario que numerador y denominador tengan signos opuestos. Esto es:

$$\left[\left|\begin{array}{r} x+1<0 \\ x<-1 \end{array}\right| \wedge \left|\begin{array}{r} x+2>0 \\ x>-2 \end{array}\right|\right] \quad \vee \quad \left[\left|\begin{array}{r} x+1>0 \\ x>-1 \end{array}\right| \wedge \left|\begin{array}{r} x+2<0 \\ x<-2 \end{array}\right|\right]$$
$$x \in (-2,-1) \qquad \vee \qquad x \in \emptyset \leftarrow \text{No hay solución.}$$

y por lo tanto, el conjunto solución es:

$$S = (-2,-1)$$

Ejemplo 8.1.14. Resuelva la inecuación:

$$\frac{x+1}{x-2} \geq 2$$

Solución:

Para utilizar las propiedades (8.1.6) y (8.1.7) es conveniente tener todos los términos en un sólo miembro de la inecuación, entonces restamos 2 en ambos miembros y obtenemos la siguiente inecuación equivalente:

$$\frac{x+1}{x-2} - 2 \geq 0$$

Ahora bien, si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales, entonces:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad \text{y} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

En nuestro caso:

$$\frac{x+1}{x-2} - 2 = \frac{x+1}{x-2} - \frac{2}{1}$$

de donde:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-2} - \frac{2}{1} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x+1-2(x-2)}{x-2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x+1-2x+4}{x-2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-x+5}{x-2} &\geq 0 \end{aligned}$$

Como en el ejemplo anterior, el denominador no puede anularse, entonces debe ser $x \neq 2$. Por lo tanto, buscamos los $x\mathbb{R} - \{2\}$ que sean solución de la inecuación.

Utilizando las propiedades (8.1.6) y (8.1.7), para que:

$$\frac{-x+5}{x-2} \geq 0$$

es necesario que numerador y denominador tengan signos iguales. Esto es:

$$\left[\left|\begin{array}{r} -x+5 \geq 0 \\ -x \geq -5 \\ x \leq 5 \end{array}\right| \wedge \left|\begin{array}{r} x-2 > 0 \\ x > 2 \end{array}\right|\right] \vee \left[\left|\begin{array}{r} -x+5 \leq 0 \\ -x \leq -5 \\ x \geq 5 \end{array}\right| \wedge \left|\begin{array}{r} x-2 < 0 \\ x < 2 \end{array}\right|\right]$$

$$x \in (2,5] \qquad \vee \qquad x \in \emptyset \leftarrow \text{No hay solución.}$$

y por lo tanto, el conjunto solución es:

$$S = (2,5]$$

Ejemplo 8.1.15. Resuelva la inecuación:

$$\frac{x^2+1}{2x-3} < 0$$

Solución:

En este caso, es importante observar que $x^2 \geq 0 \;\forall\, x \in \mathbb{R}$. Pero entonces $x^2+1 \geq 1 \;\forall\, x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, al signo de:

$$\frac{x^2+1}{2x-3}$$

lo gobierna el denominador $2x-3$.

De esta forma:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{2x-3} &< 0 \\ \Leftrightarrow 2x-3 &< 0 \\ \Leftrightarrow 2x &< 3 \\ \Leftrightarrow x &< \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Luego: El conjunto solución de la inecuación es:

$$S = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$$

8.2. Ejercicios

1. Escriba las siguientes inecuaciones utilizando la notación de intervalos y luego realice el gráfico correspondiente.

   a) $x > 0$.
   b) $x \leq -2$.
   c) $-1 \leq x < 4$.
   d) $x \geq -\frac{3}{2}$.
   e) $\frac{1}{2} < x < 3^2$.
   f) $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{2}{3}$.

2. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si la afirmación es verdadera, fundamente sus respuestas enunciando qué propiedades u operaciones utiliza para dar la misma, y en caso de ser falsa de un contraejemplo.

   a) Si $a > b$, entonces $a - 10 > b - 10$ ......
   b) Si $a < b$, entonces $-a < -b$ ......
   c) Si $a \geq 1$, entonces $\frac{1}{a} \leq 1$ ......
   d) Si $0 \leq a \leq 1$, entonces $0 \leq a^2 \leq 1$ ......
   e) Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $ab^2 > 0$ ......
   f) Si $a \neq 0$, entonces $\frac{a+a}{a} = 2$ ......
   g) Si $a < b < 0$, entonces $a^2 < b^2$ ......

3. Resolver las siguientes inecuaciones lineales e indicar donde se utilizan las operaciones enunciadas en la sección 8.1.1 en la pág. 103. Escribir el conjunto solución en notación de intervalos y hacer el gráfico correspondiente.

   a)
   $$\frac{1}{5}x + 3 \leq 5$$
   b)
   $$-\frac{3}{2}x + 8 < 2x - 6$$
   c)
   $$-5 < x + 4 < \frac{1}{2}$$

d)
$$0 < \frac{1}{2}(6-8x) < x+5$$

e)
$$-(3-4x) > 2x-7$$

f)
$$\sqrt{2}+3 < 6x+3 < 9$$

g)
$$2(x-6) \geq 3(5-x)$$

h)
$$\frac{\sqrt{2}}{3}x - \frac{5}{2} > \frac{1}{2}\left(3 - \frac{4\sqrt{2}}{3}x\right)$$

4. Resolver las siguientes inecuaciones con módulo, indicando las propiedades utilizadas, y escribiendo el conjunto solución en notación de intervalos o unión de intervalos. Trazar el gráfico correspondiente.

a)
$$|5x| \geq 25$$

b)
$$|x-10| \leq 2$$

c)
$$|-6x| \leq 2$$

d)
$$\left|\sqrt{3}x-4\right| > 5$$

e)
$$\left|5-\left(\frac{1}{3}x+3\right)\right| < 7$$

f)
$$|2x+10| > 0$$

g)
$$|-12-4x| < 6$$

h)
$$\left|\frac{3}{4}x+4\right| < \frac{1}{10}$$

5. Utilizar dos inecuaciones con módulo para resolver las siguientes inecuaciones simultáneas.

   Escribir el conjunto solución en notación de intervalos o de unión de intervalos y trazar el gráfico correspondiente.

a)
$$3 < |x-2| < 7$$

b)
$$\frac{1}{3} \leq \left|3x+\frac{2}{3}\right| \leq \frac{1}{6}$$

6. Resolver las siguientes inecuaciones cuadráticas e indicar las propiedades utilizadas en cada paso. Escribir el conjunto solución con notación de intervalos o de unión de intervalos y trazar el gráfico correspondiente.

a)
$$x^2 - 25 \leq 0$$

b)
$$(x-1)(x+3) > 0$$

c)
$$(2x-3)(x-4) < 0$$

d)
$$x^2 - 7x \geq 0$$

e)
$$3x^2 - 5x + 8 \leq 2(x-1)(x+4)$$

f)
$$-9x > 2x^2 - 18$$

7. Resolver las siguientes inecuaciones racionales indicando las propiedades utilizadas en cada paso. Escribir el conjunto solución en notación de intervalos o unión de intervalos, trazando el gráfico correspondiente.

   a)
   $$\frac{3x-5}{x+2} > 1$$

   b)
   $$\frac{x-8}{x} \geq 0$$

   c)
   $$\frac{x+1}{x-2} \leq -2$$

   d)
   $$\frac{x}{x^2-16} < 0$$

   e)
   $$\frac{x^2-1}{x-2} \geq 0$$

   f)
   $$\frac{5}{x^2-9} > 0$$

   g)
   $$\frac{(x-2)(x+3)}{x^2-3x+2} < 0$$

   h)
   $$\frac{3x}{x-2} < \frac{2x}{x+3}$$

8. Utilizar una inecuación para resolver las siguientes situaciones problemáticas.

   a) Pedro cobre \$15000 al año más una comisión del 8 % de sus ventas. ¿Qué ventas anuales corresponderían a un ingreso anual que esté comprendido entre \$22000 y \$28000?

   b) Un remisero cobre \$10 el cuarto de milla y \$4 por cada cuarto de milla adicional. ¿Qué distancia en cuartos de milla pudo recorrer un pasajero que tiene entre \$40 y \$55?

   c) Si 10 veces un número se disminuye en 15 el resultado es mayor a 35. ¿Qué puede decirse de dicho número?

d) El número de diagonales d de un polígono de n lados con $n \in \mathbb{N}$, esta dado por:

$$d = \frac{n(n-1)}{2} - n$$

¿Qué polígonos tienen más de 27 diagonales? ¿Cuántos lados tiene un polígono de 90 diagonales?

e) Determine los tres números naturales consecutivos tales que la suma de sus cuadraros es mayor o igual que 365.

8.3. Teoría Complementaria

A continuación, definiremos operaciones entre divisiones de polinomios que pueden ser de gran utilidad para resolver algunos ejercicios de la sección anterior.

8.3.1. Operaciones entre divisiones de polinomios

Si P_1, P_2, Q_1 y Q_2 son polinomios con coeficientes reales, definimos las siguientes operaciones:

1. Simplificación:
$$\frac{P_1(x)\cancel{Q_1(x)}}{P_2(x)\cancel{Q_1(x)}} = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$$
para los $x \in \mathbb{R}$ tales que $P_2(x) \neq 0$ y $Q_1(x) \neq 0$.

2. Suma y resta:
$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)Q_2(x) + P_2(x)Q_1(x)}{Q_1(x)Q_2(x)}$$
para los $x \in \mathbb{R}$ tales que $Q_1(x) \neq 0$ y $Q_2(x) \neq 0$.

3. Producto:
$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \cdot \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)P_2(x)}{Q_1(x)Q_2(x)}$$
para los $x \in \mathbb{R}$ tales que $Q_1(x) \neq 0$ y $Q_2(x) \neq 0$.

4. División:
$$\frac{\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}}{\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \cdot \frac{Q_2(x)}{P_2(x)} = \frac{P_1(x)Q_2(x)}{Q_1(x)P_2(x)}$$
para los $x \in \mathbb{R}$ tales que $Q_1(x) \neq 0$, $P_2(x) \neq 0$ y $Q_2(x) \neq 0$.

8.3.2. Ejemplos prácticos

Ejemplo 8.3.1.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 36}{3x^2 - 18x} &= \frac{\cancel{(x-6)}(x+6)}{3x\cancel{(x-6)}} \\ &= \frac{x+6}{3x} \leftarrow \text{Si } x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 6 \end{aligned}$$

En este ejemplo $P_1(x) = x + 6$, $Q_1(x) = x - 6$, $P_2(x) = 3x$ y $Q_2(x) = x - 6$.

Ejemplo 8.3.2.

$$\begin{aligned}\frac{3x}{x-1}+\frac{4x}{x+2} &= \frac{3x\,(x+2)+4x\,(x-1)}{(x-1)\,(x+2)}\\ &= \frac{3x^2+6x+4x^2-4x}{(x-1)\,(x+2)}\\ &= \frac{7x^2+2x}{(x-1)\,(x+2)}\end{aligned}$$

para $x \neq 1$ y $x \neq -2$.

Ejemplo 8.3.3.

$$\begin{aligned}\frac{3x}{x-1}-\frac{4x}{x+2} &= \frac{3x\,(x+2)-4x\,(x-1)}{(x-1)\,(x+2)}\\ &= \frac{3x^2+6x-4x^2+4x}{(x-1)\,(x+2)}\\ &= \frac{-x^2+10x}{(x-1)\,(x+2)}\end{aligned}$$

para $x \neq 1$ y $x \neq -2$.

Ejemplo 8.3.4.

$$\begin{aligned}\frac{\frac{x-1}{x+2}}{\frac{x-1}{x+3}} &= \frac{\cancel{x-1}}{x+2}\cdot\frac{x+3}{\cancel{x-1}}\\ &= \frac{x+3}{x+2}\end{aligned}$$

Ejemplo 8.3.5. Resuelva la inecuación:

$$\frac{x^2-16}{(x-3)\,(x+4)} > 0$$

Solución:

Primero observemos que $x^2-16=(x-4)\,(x+4)$ y que si $x=4$ o $x=3$ el denominador es cero, por lo tanto, $x=4$ y $x=3$ no pueden ser solución de la inecuación.

Entonces buscamos los $x \in \mathbb{R}-\{-4,\ 3\}$ que son solución de la inecuación.

Tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{x^2-16}{(x-3)\,(x+4)} &= \frac{(x-4)\cancel{(x+4)}}{(x-3)\cancel{(x+4)}}\\ &= \frac{x-4}{x-3}\end{aligned}$$

Pero entonces:

$$\frac{x^2-16}{(x-3)\,(x+4)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x-3} > 0$$

Luego resolvemos la inecuación:

$$\frac{x-4}{x-3} > 0$$

teniendo en cuenta que $x \neq 3$ y $x \neq -4$.

Debe suceder que $x-4$ y $x-3$ tengan el mismo signo, pero entonces hay dos posibilidades:

$$\begin{array}{ccc}
\left[\left|\begin{array}{r} x-4>0 \\ x>4 \end{array}\right| \wedge \left|\begin{array}{r} x-3>0 \\ x>3 \end{array}\right|\right] & \vee & \left[\left|\begin{array}{r} x-4<0 \\ x<4 \end{array}\right| \wedge \left|\begin{array}{r} x-3<0 \\ x<3 \end{array}\right|\right] \\
x \in (4,+\infty) & \vee & x \in (-\infty,-4) \cup (-4,3) \leftarrow \text{Pues } x \neq 4
\end{array}$$

Pero entonces el conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{x^2-16}{(x-3)(x+4)} > 0$$

es:

$$S = (-\infty,-4) \cup (-4,-3) \cup (4,+\infty)$$

Parte III

Geometría y Trigonometría

Capítulo 9

Geometría

9.1. Teoría Básica

9.1.1. Introducción

Es normal que observemos figuras geométricas elementales en la vida cotidiana y para resolver problemas prácticos que las incluyan necesitamos comprender los elementos que las forman.

Por ejemplo, para desarrollar un software que permita controlar los movimientos de un robot, como dicho robot se moverá a través del espacio, debemos comprender las características de las figuras y elementos que componen dicho espacio, antes de poder escribir en papel las órdenes que compondrán el software que rija el movimiento del robot. Este ejemplo pone de manifiesto las dificultades a superar a la hora de tener que escribir un programa de ese tipo, y permite darnos cuenta de inmediato que las mismas están relacionadas con la geometría.

Para comprender la importancia del estudio sistemático de las figuras geométricas, podemos enumerar algunas situaciones problemáticas que se pueden presentar habitualmente y que, para resolverlas, resulta imprescindible poder realizar cálculos sobre las mismas, objeto de este capítulo:

1. Imaginemos que deseamos alfombrar nuestra habitación — *cuya forma es rectangular* — y mide 5 metros de largo por 3 metros de ancho, con una alfombra cuyo costo es de \$80 el m^2. Si quisiéramos saber cuántos metros cuadrados de alfombra debiéramos comprar, así como también el costo total de la misma, podemos proceder como sigue:

   - Obtener el *área* o *superficie* total del rectángulo que representa las dimensiones de la habitación, para lo cual debemos multiplicar los 5 metros de largo por los 3 metros de ancho, resultando:

     $$A = 5m \cdot 3m = 15m^2$$

   - Luego, para averiguar el costo total de la alfombra, multiplicamos los metros cuadrados obtenidos en el paso anterior por el costo de cada m^2 de alfombra, lo que resulta:

     $$C = A \cdot 80\frac{\$}{m^2} = 15\cancel{m^2} \cdot 80 \cdot \frac{\$}{\cancel{m^2}} = \$1200$$

   Puede verse que al operar en el caso concreto presentado debimos utilizar las *unidades* en que medimos la superficie o área y el costo de la alfombra por metro cuadrado. Esta última unidad la indicamos como $\left[\frac{\$}{m^2}\right]$. Al operar nos encontramos que la unidad de área m^2 se encuentra multiplicando y dividiendo en la expresión del costo total, lo que permitió simplificar la unidad en el numerador y el denominador de la misma, y el valor queda directamente en \$. El resultado final lo indicamos con la unidad \$ adelante porque es habitual hacerlo de ese modo, lo que no invalida que se pueda escribir 1200\$ con el símbolo de \$ después del número.

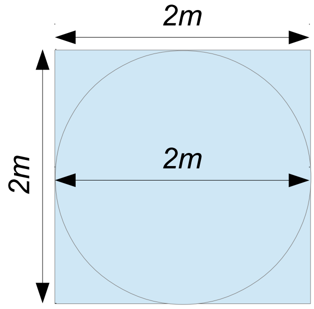
- Si luego de alfombrar la habitación queremos colocar un zócalo a modo de terminación, eligiendo como zócalo una tira de madera de $6cm$ de altura, cuyo costo por metro lineal es de \$20, para calcular el gasto total debemos obtener la cantidad de zócalo necesaria y el costo del mismo:
  - En primer lugar necesitamos calcular la longitud total del zócalo, que coincide con lo que denominamos *perímetro* del rectángulo que conforma el piso de la habitación. Como el mismo tiene dos lados de $3m$ y dos lados de $5m$, su perímetro — *es decir la longitud del borde de la figura* — se puede calcular como:

$$P = 3m + 3m + 5m + 5m = 16m$$

  - El costo total del zócalo se obtendrá multiplicando los 16 metros necesarios de la tira de madera por el costo por metro lineal de la misma, resultando:

$$C = 16\cancel{m} \cdot 20\frac{\$}{\cancel{m}} = \$320$$

2. Un edificio de departamentos necesita colocar un tanque de agua con capacidad de 10.000 litros — *es decir* 10.000 *centímetros cúbicos lo que equivale a* $10m^3$ — para abastecer al edificio. El tanque se ubica en la azotea en un espacio cuadrado de 2 metros de lado. Se usara un tanque de forma cilíndrica, del cual necesitamos averiguar sus dimensiones, de modo que pueda almacenar 10.000 litros de agua. Para hacernos una idea mental de cómo será el espacio disponible para el tanque y el lugar ocupado por el mismo, podemos hacer el dibujo sobre un plano obteniendo:



- Como el lado del cuadrado que representa el lugar geométrico donde ubicaremos el tanque es $l = 2m$, entonces podemos encargar un tanque cilíndrico de base circular, cuyo diámetro sea de $2m$ — *es decir un radio* $r = 1\,m$. El volumen de un tanque cilíndrico puede calcularse como la superficie S de la base por la altura h del mismo. La superficie de un círculo puede obtenerse como $S = \pi \cdot r^2$. Es decir:

$$10m^3 = V = \pi \cdot (1m)^2 \cdot h$$

  Resolviendo la ecuación para despejar la altura del tanque, obtenemos:

$$h = \frac{10m^{\cancel{3}}}{\pi \cancel{m^2}} = \frac{10}{\pi}m \approx 3{,}2m$$

- Pero entonces, debemos encargar un tanque cilíndrico con un diámetro para la base de $2m$ y una altura de $3{,}2m$.

Como pudimos observar en los ejemplos anteriores, las figuras geométricas elementales que aparecen continuamente en la vida cotidiana suelen ser puntos, rectas, cuadrados, rectángulos, círculos, triángulos, polígonos, cilindros, cubos, etc...

Podemos distinguir entonces dos grupos de figuras:

- Las que pertenecen al plano como ser: puntos, rectas, cuadrados, rectángulos, polígonos, círculos, triángulos, etc., son figuras de dos dimensiones y diremos que son *bidimensionales*.

- Los cuerpos como: cilindros, cubos, etc., ocupan un lugar en el espacio que posee tres dimensiones, y por eso diremos que son figuras *tridimensionales*.

La geometría se ocupa — *entre otras cosas* — del estudio sistemático de estas figuras y cuerpos, elaborando expresiones algebraicas que nos permitan calcular sus áreas, perímetros, superficies y volúmenes, que son indispensables para resolver problemas prácticos, cuando lo que se debe calcular puede descomponerse en elementos que resulten asimilables a este tipo de figuras o cuerpos.

Por todo lo dicho, queda justificada la importancia de realizar un estudio sistemático de geometría.

9.1.2. Nociones preliminares

Ya dijimos que la geometría se ocupa de las figuras y cuerpos elementales, pero todas estas figuras aunque pueden existir dentro de nuestra imaginación, es conveniente muchas veces representarlas de algún modo para razonar sobre de ellas.

Normalmente solemos dibujarlos en papel. Cuando se trata de figuras planas o bidimensionales su dibujo es muy simple ya que no necesitamos utilizar perspectiva.

El problema de dibujar muchas figuras no superpuestas sobre un papel, es que cualquier hoja que utilicemos tiene dimensiones acotadas. Si superáramos mentalmente esta dificultad imaginando una hoja de papel de tamaño infinito, con posibilidad de representar sobre él una cantidad indefinida de figuras, aparece naturalmente la idea de *plano*, por lo que al plano lo podemos conceptualizar como una hoja de papel infinita.

A partir de acá y hasta el capítulo en que nos ocupemos de los cuerpos en el espacio, trabajaremos con figuras planas y, aunque no lo digamos expresamente, consideraremos que siempre trabajamos en un plano.

Debido a la cantidad tan variada de figuras elementales de las que se ocupa la geometría, es razonable ir definiendo dichas figuras desde la más elemental hasta la más compleja, y de ser posible, de modo tal que con las figuras más elementales podamos formar las más complejas. Cuando nos encontramos con figuras complejas podremos hacer el camino inverso, descomponiéndolas en figuras más simples para las cuales las expresiones que encontraremos para el cálculo de sus propiedades resulten más sencillas.

A continuación iremos definiendo una serie de objetos geométricos, ordenándolos coherentemente según este criterio que consiste en ir desde lo más simple hasta lo más complejo. Y si reflexionamos un momento sobre cuál podría ser la figura más elemental posible, es altamente probable que todos estemos de acuerdo en que dicha figura sea el *punto*, el cual podemos concebirlo como la unidad geométrica más pequeña posible. En su primer libro Euclides[1] reflexiona acerca del punto para construir sus postulados,[2] diciendo que:

> "Un punto es lo que no tiene área ni medida ni longitud" *(Euclides, Elementos)*

Probablemente Euclides se haya dado cuenta de la dificultad de definir la noción de *punto* y por eso haya elegido en lugar de hacer una definición precisa, resolver el problema de definir al punto indicando algunas de sus cualidades que lo hacen distinguible de las demás figuras elementales. En efecto, lo que caracteriza al punto es esa propiedad de ser tan pequeño que carece de área, longitud o volumen.

Imaginemos un paisaje desértico lleno de arena en toda su extensión. La reunión de todos esos granos de arena permiten distinguir entre ellos figuras, ondulaciones y formas en el terreno, que se forman muchas veces por la acción del viento. Si tomamos un puñado de arena de ese desierto imaginario, en seguida nos daremos cuenta de que está compuesto de una cantidad enorme de pequeños granos diminutos, casi imperceptibles. Podríamos identificar cada uno de estos granos como si fuera un punto.

Los puntos son las figuras geométricas más elementales. Carecen de área, longitud o volumen y para decir esto último de una manera matemáticamente más formal, diremos que los puntos son objetos geométricos

[1]Euclides fue un matemático y geómetra griego que vivió entre los años 325 ac y 265 ac. Se le conoce como "*El Padre de la Geometría*". Su obra "*Los elementos*" es una de las obras científicas más conocidas del mundo y era una recopilación del conocimiento impartido en el centro académico. En ella se presenta de manera formal, partiendo únicamente de cinco postulados, el estudio de las propiedades de líneas y planos, círculos y esferas, triángulos y conos, etc. Probablemente ninguno de los resultados de "*Los elementos*" haya sido demostrado por primera vez por Euclides, pero la organización del material y su exposición sin duda alguna se deben a él. De hecho hay mucha evidencia de que Euclides usó libros de texto anteriores cuando escribía los elementos ya que presenta un gran número de definiciones que no son usadas, tales como la de un oblongo, un rombo y un romboide.

[2]Un postulado es una afirmación cuya verdad se admite sin pruebas que es necesaria para servir de base a ulteriores razonamientos. Normalmente su veracidad se comprueba en base a la verificación de las conclusiones obtenidas a partir de razonamientos posteriores.

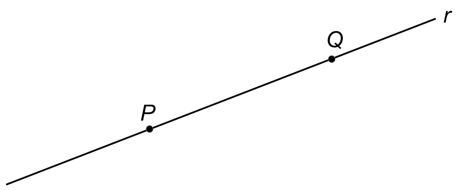
En la época de Euclides, los postulados se consideraban *verdades absolutas o evidentes*.

sin dimensión, lo que consideraremos como *dimensión* 0. Gráficamente los podemos representar como en la siguiente figura, donde al punto se le asignará una letra, generalmente mayúscula para distinguirlo:

A partir de acá comenzaremos un estudio más formal del tema, para lo cual necesitaremos realizar definiciones que permitan establecer en forma precisa lo que entendemos por cada figura elemental que utilicemos y sus propiedades.

A la noción de punto le sigue la de *recta*, que también resultará familiar, aunque sea de manera intuitiva. Dados dos puntos cualesquiera P y Q en el plano, existe una única recta que pasa por esos dos puntos, y este fue uno de los postulados de Euclides en sus Elementos. Gráficamente podemos comprobar que si ubicamos en el plano dos puntos cualesquiera P y Q, y mediante una regla los unimos y prolongamos indefinidamente en ambos sentidos, obtenemos lo que entendemos por recta, que llamaremos en este caso r, como se ve en la *Fig.* 9.1.1.

Figura 9.1.1: Recta que pasa por dos Puntos



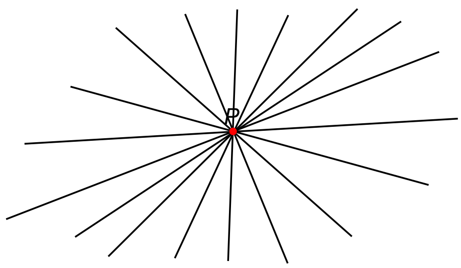
En la figura pueden observarse una recta r que pasa por dos puntos P y Q.

Formalmente:

Definición 9.1.1. Dados dos puntos P y Q, existe una única recta r que pasa por esos dos puntos.

Es fácil comprender que por un punto P podemos dibujar sobre un plano que contiene a dicho punto, la cantidad de rectas que queramos. En realidad por un único punto P pasan infinitas rectas. Al conjunto de todas esas rectas se las denomina "*haz de rectas que pasan por el punto P*", como se ve en la *Fig.* 9.1.2.

Figura 9.1.2: Haz de rectas que pasan por el punto P



Formalmente:

Definición 9.1.2. Por un punto P se pueden trazar infinitas rectas en un plano, que se cortan en dicho punto.

Como estamos trabajando en el plano, entonces cualquier recta que consideremos, estará incluida en dicho plano. Si dibujamos una recta sobre un plano, como se ve en la siguiente figura:

Figura 9.1.3: Recta en un Plano

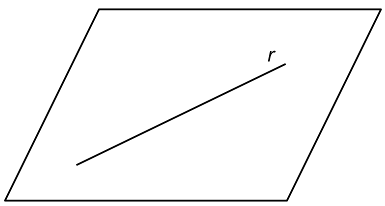
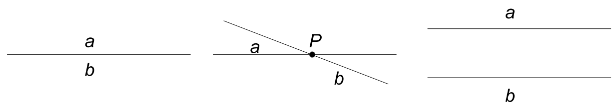


Figura 9.1.5: Posiciones Relativas de una Recta



En la figura pueden observarse las posiciones relativas entre dos posibles rectas a y b.

resulta fácil observar que al considerar que el plano y la recta son indefinidos — *el plano tiene área infinita y la recta longitud infinita* — la recta r divide al plano en dos regiones, una a cada lado de esta recta, que pueden considerarse mitades iguales cuya unión compone todo el plano. A cada una de estas mitades la denominaremos *semiplano*.

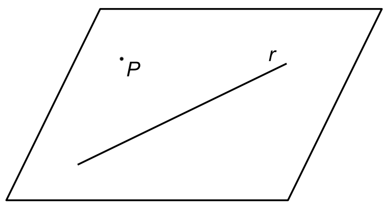
Evidentemente esto será válido para cualquier recta que se trace sobre el plano.

Formalmente:

Definición 9.1.3. Cada recta r trazada sobre un plano divide a éste en dos regiones llamadas *semiplanos*, ubicadas a cada lado de dicha recta.

Observando la *Fig.* 9.1.3 se desprende que en el plano existen infinitos puntos que no tienen por qué estar contenidos en la recta r, y en particular podemos indicar en el dibujo uno de esos puntos, que denominaremos P.

Figura 9.1.4: Punto exterior a una recta en un mismo Plano



Resulta evidente que siempre que tenga una recta r puedo dibujar un punto P que no pertenezca a ella, sobre el plano.

En base a esta conclusión uno de los postulados de Euclides en su libro indica que:

Definición 9.1.4. Dada una recta r, existe un punto P que no pertenece a dicha recta.

Para poder seguir avanzando en los conceptos es necesario introducir las posiciones relativas entre dos rectas cualesquiera a y b. Pueden ocurrir tes cosas — *ver Fig.* 9.1.5:

1. Las rectas a y b se cortan en más de un punto. En este caso no hay otra posibilidad de que sean la misma recta y por eso se dice que a y b son *coincidentes* o *congruentes*.

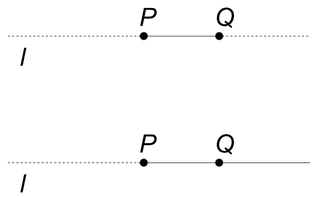
2. Las rectas a y b se cortan en un único punto P.

3. Las rectas a y b no se cortan en ningún punto. En este caso diremos que a es *paralela* a b, y en símbolos esto se nota $a \parallel b$.

Las posiciones relativas entre dos rectas permiten reflexionar acerca de uno de los postulados de Euclides — *tal vez el más controvertido* — que afirma que dos rectas paralelas no se cortan en ningún punto. En realidad nosotros lo hemos tomado como definición, pero cabe destacar que es posible pensar en otro tipo de geometrías — *evidentemente no planas* — donde las paralelas puedan cortarse eventualmente en algún punto. Se llaman geometrías *no euclideanas* y el punto de intersección entre dos o más paralelas suele ser un punto en el infinito, al cual convergen todas esas paralelas. Sin embargo, en este curso asumiremos que las paralelas no se cortan en ningún punto.

Para ser coherentes con lo dicho en el párrafo anterior es necesario hacer un nuevo postulado, que podemos volcar en la siguiente:

Figura 9.1.6: Semirrecta y Segmento



En la figura puede el segmento $\overline{PQ}$ y la semirrecta $\overrightarrow{PQ}$.

Definición 9.1.5. Dada una recta a y un punto P exterior a ella, entonces existe una recta b que es paralela a a y pasa por el punto P.

Otras nociones importantes en geometría son las de *semirrecta* y *segmento*. Si l es la recta que pasa por los puntos P y Q, entonces es claro que el punto P divide a la recta en dos partes, una conteniendo al punto Q y la otra que no lo contiene. Llamaremos *semirrecta con origen en P y conteniendo a Q* a la parte de la recta l que iniciando en P se prolonga indefinidamente hacia el lado de la misma que contiene al punto Q. En símbolos esto se nota $\overrightarrow{PQ}$. Al trozo de recta que inicia en P y termina en Q se lo denomina *segmento* y se nota $\overline{PQ}$ — *ver Fig.* (9.1.6).

A diferencia de las rectas y semirrectas, los segmentos son acotados y esto implica que puede asignárseles una *medida*. La *medida* de un segmento $\overline{PQ}$ es la longitud que mide dicho segmento, y se nota $\left|\overline{PQ}\right|$. Muchas veces resulta incómodo poner las barras $||$ para indicar la medida del segmento y es común aludir a dicha medida refiriéndose al mismo segmento $\overline{PQ}$ para indicar dicha medida. Generalmente es claro cuándo se alude a una y otra cosa, y suele reconocerse a través del contexto.

Definición 9.1.6. Dos segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ se dirán *congruentes* si tienen la misma medida, esto es si $\left|\overline{PQ}\right| = \left|\overline{RS}\right|$.

Observación 9.1.1. En ocasiones referirse a la medida de un segmento mediante la notación $\left|\overline{PQ}\right|$ suele ser engorroso, y por eso cuando no haya ambigüedad simplemente escribiremos $\overline{PQ}$ en lugar de $\left|\overline{PQ}\right|$.

Hemos establecido entonces que la *geometría plana* se ocupa de estudiar numerosos objetos como ser puntos, rectas, segmentos, semirrectas, ángulos, triángulos, cuadriláteros, polígonos, circunferencias, elipses, etc... A pesar de que estos objetos tengan características muy diferentes entre sí, todos tienen algo en común: el hecho de pertenecer a un *lugar* denominado *plano*, que las puede contener.

Es decir el lugar donde pertenecen todas las figuras elementales nombradas se denomina *plano*, y podemos imaginarlo como si fuera una *hoja infinita* con capacidad ilimitada para contener todas estas figuras — *ver Fig.* 9.1.7.

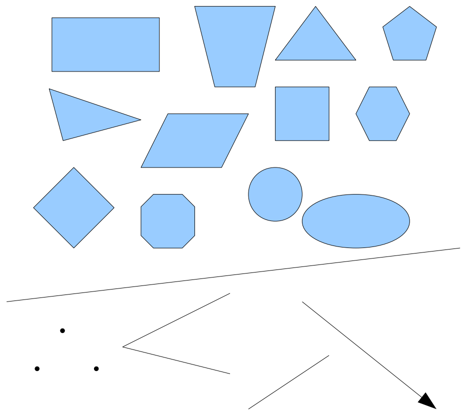
9.1.3. Ángulos

En la sección anterior definimos las nociones básicas o preliminares necesarias para construir objetos geométricos más complejos. La noción de *ángulo* es tal vez la primera noción elemental construible a partir de las nociones anteriores.

Definición 9.1.7. Si en el plano ubicamos tres puntos A, B y C no pertenecientes a una misma recta y trazamos las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, entonces queda determinado un *ángulo* que llamaremos $B\overset{\angle}{A}C$, donde el punto A se considera su *vértice*. Generalmente los ángulos se designan con legras griegas como por ejemplo α, y en este sentido podemos identificar al ángulo $B\overset{\angle}{A}C$ con dicha letra — *ver Fig.* 9.1.8.

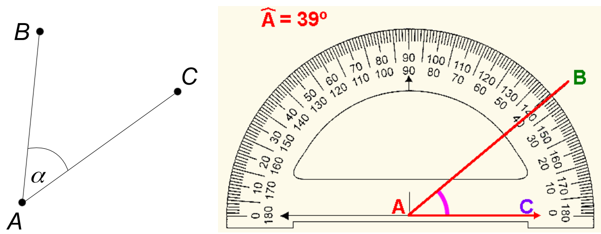
Hay varios sistemas de numeración para designar la medida de un ángulo, pero en general suele utilizarse el sistema *sexagesimal*, que consiste en una escala de 0° hasta 360° subdividida en intervalos de a un grado. A su vez, los grados se subdividen en 60 partes llamadas *minutos* y los minutos se subdividen nuevamente en

Figura 9.1.7: El Plano Euclídeo



En la figura puede observarse una representación posible del plano en forma de *hoja infinita*. Dentro del mismo se han dibujado numerosas figuras geométricas básicas.

Figura 9.1.8: Ángulo



En la figura puede observarse el ángulo $\alpha = \overset{\angle}{BAC}$.

otras 60 partes llamadas *segundos*. El instrumento geométrico normalmente utilizado para medir la apertura de un ángulo se llama *transportador* y puede observarse en la *Fig.* 9.1.8.

El procedimiento para medir la apertura de un ángulo $\alpha = \overset{\angle}{BAC}$ es muy sencillo — *ver Fig.* 9.1.8:

- Se hace coincidir el centro del transportador con el vértice A del ángulo, de tal forma que la semirrecta $\overrightarrow{AC}$ quede en alineada con la base del transportador.
- Luego se observa en qué lugar del mismo quedó ubicada la semirrecta $\overrightarrow{AB}$, lo que nos permite determinar su apertura.

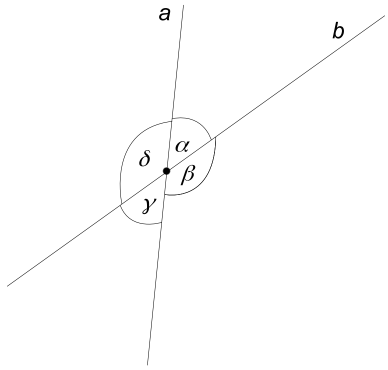
Generalmente los transportadores utilizan el sistema *sexagesimal* mencionado anteriormente, pero en caso de utilizarse otro sistema de medición, es muy sencillo convertir las unidades mediante la aplicación de una regla de tres simple.

9.1.3.1. Ángulos determinados por la intersección de dos rectas

Dadas dos rectas a y b que se cortan en un punto P, quedan determinados cuatro ángulos, digamos α, β, γ y δ — *ver Fig.* 9.1.9. Estos cuatro ángulos guardan ciertas relaciones entre sí que son muy importantes, y motivan una serie de definiciones.

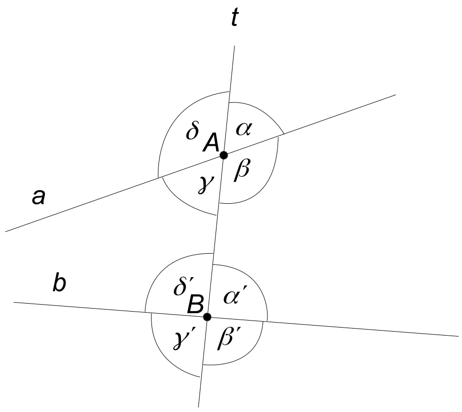
- Los ángulos que tienen un lado común y son tales que los otros dos son semirrectas opuestas se llaman *adyacentes*. En la *Fig.* 9.1.9 puede observarse que α y δ son adyacentes y que β y γ también lo son. Los ángulos adyacentes tienen la propiedad de sumar 180° como fácilmente puede comprobarse visualmente en la figura. Los ángulos que suman 180° se dirán *suplementarios*. En este sentido δ es suplementario de α y viceversa; β es suplementario de γ y viceversa.

Figura 9.1.9: Ángulo determinados por dos Rectas



En la figura pueden observarse los cuatro ángulos determinados por la intersección de dos rectas a y b.

Figura 9.1.10: Ángulo determinados por tres Rectas



En la figura pueden observarse los ocho ángulos determinados por la intersección de dos rectas a y b cortadas por una transversal t.

- Por otra parte, si los lados de un ángulo son semirrectas opuestas de los lados de otro ángulo, diremos que dichos ángulos son *opuestos por el vértice*. En la *Fig.* 9.1.9 vemos que γ es opuesto por el vértice de α y que β es opuesto por el vértice de δ. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

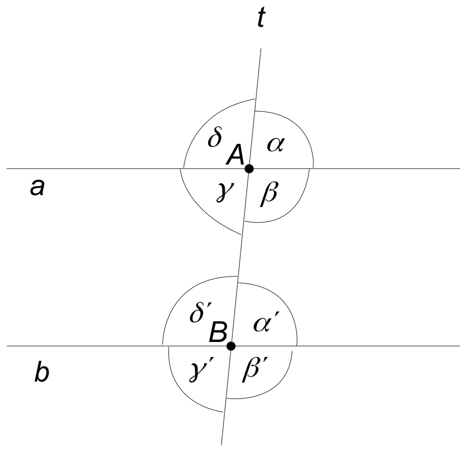
9.1.3.2. Ángulos determinados por dos rectas cortadas por una transversal

Sean dos rectas a y b cortadas por una transversal t en los puntos A y B respectivamente, tal como lo muestra la *Fig.* 9.1.10.

Como puede observarse, quedan determinados cuatro ángulos α, β, γ y δ en la intersección de a con t y otros cuatro ángulos α', β', γ' y δ'. Cada uno de los grupos de ángulos verifica las relaciones mencionadas en la sección anterior, por ser ángulos determinados por dos rectas que se cortan en un punto. Con respecto a las relaciones entre ángulos de diferentes grupos, definimos lo siguiente:

- Los ángulos que se encuentran en un mismo semiplano con respecto a la transversal t se llaman *colaterales*. En este sentido α, β, α' y β' son colaterales. Y lo mismo para los del otro semiplano — *ver Fig.* 9.1.10.
- Los ángulos contenidos en el semiplano de borde a al que no pertenece el punto B y los contenidos en el semiplano de borde b al que no pertenece el punto A se llaman *exteriores* — *ver Fig.* 9.1.10.
- Análogamente se definen los ángulos *interiores*, que en este caso son γ, β, α' y β' — *ver Fig.* 9.1.10.
- Los ángulos que son colaterales, no adyacentes y tales que uno es interior y el otro es exterior, se dicen *correspondientes*. Ejemplos de ángulos correspondientes lo son α y α' o bien δ y δ'.

Figura 9.1.11: Ángulo determinados por dos paralelas cortadas por una Transversal



En la figura pueden observarse los ocho ángulos determinados por dos rectas paralelas a y b cortadas por una transversal t.

- Los ángulos que son colaterales y ambos interiores se dicen *conjugados internos*. Ejemplos de ángulos conjugados internos lo son β y α' o bien γ y δ'.
- Los ángulos que son colaterales y ambos exteriores se dicen *conjugados externos*. Por ejemplo δ y γ' son conjugados externos.
- Si dos ángulos no son ni colaterales ni adyacentes y ambos son internos, entonces se dirán *alternos internos*. Por ejemplo γ y α' o bien β y δ' son alternos internos.
- Por último, si dos ángulos no son ni colaterales ni adyacentes y ambos son exteriores, entonces se dirán *alternos externos*. Por ejemplo δ y β' o bien α y γ' son alternos externos.

9.1.3.3. Ángulos determinados por dos paralelas cortadas por una transversal

Si repetimos la construcción hecha en la sección anterior, pero esta vez imponemos que a y b sean paralelas, surgen unas simples relaciones entre los ocho ángulos, las cuales son fácilmente comprobables y pueden resumirse en los siguientes ítems — *ver Fig. 9.1.11* :

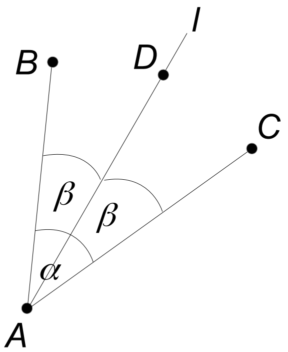
- Los ángulos correspondientes entre paralelas son congruentes.
- Los ángulos alternos internos son congruentes.
- Los ángulos alternos externos son congruentes.
- Los ángulos conjugados internos son suplementarios.
- Los ángulos conjugados externos son suplementarios.
- Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
- Los ángulos adyacentes son suplementarios.

9.1.3.4. Otras definiciones importantes

Definición 9.1.8. Los ángulos *rectos* son aquellos que miden 90°, y si dos ángulos α y β son tales que su suma es de 90° entonces diremos que α y β son *complementarios*.

La noción de ángulo recto y de ángulos complementarios es muy importante en geometría e iremos descubriendo dicha importancia a medida que avancemos en el estudio de la misma. Es particularmente importante en triángulos.

Figura 9.1.12: Bisectriz de un Ángulo



En la figura puede observarse la bisectriz $l = \overrightarrow{AD}$ del ángulo $\alpha = \overset{\angle}{BAD}$, donde $\beta = \frac{1}{2}\alpha$.

Definición 9.1.9. Consideremos el ángulo $\alpha = \overset{\angle}{BAC}$ y una semirrecta l con origen en A comprendida entre las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, digamos la semirrecta $\overrightarrow{AD}$ — *ver Fig.* 9.1.12. Si dicha semirrecta divide al ángulo α en dos partes iguales, entonces la llamaremos *bisectriz del ángulo α.*

9.1.4. Proporcionalidad de segmentos - Teorema de Thales

En las secciones anteriores definimos las nociones fundamentales para poder trabajar en geometría, e introducimos entre otras cosas la definición de *segmento*. En esta sección veremos un teorema muy importante que estudia las condiciones para que ciertos pares de segmentos sean proporcionales. El teorema en cuestión se llama Teorema de Thales.

9.1.4.1. Un poco de historia

Thales nació en la ciudad griega de Mileto — *actualmente perteneciente a Turquía* — y vivió entre los años 624 A.C. y 548 A.C. Se dedicaba al comercio fundamentalmente, pero también era ingeniero, astrónomo, filósofo y matemático, aunque en esa época no había una clara distinción ni nombres concretos para estas actividades. Si bien de su vida se sabe muy poco, no hay dudas sobre su inteligencia, ya que fue el primero de los siete grandes sabios griegos. Pasó mucho tiempo en Egipto donde recogió todos los conocimientos geométricos de la época, y fue el primer matemático en utilizar el método deductivo para demostrar propiedades.

Según la leyenda, utilizó el teorema que hoy lleva su nombre para medir la altura de una pirámide utilizando su propia altura, la medida de su sombra y la de la sombra de la pirámide. También causó gran asombro cuando pronosticó, mediante cálculos matemáticos, un eclipse total de Sol en el año 585 A.C.

9.1.4.2. El Teorema de Thales

A continuación, enunciaremos el Teorema de Thales y exploraremos posteriormente sus consecuencias.

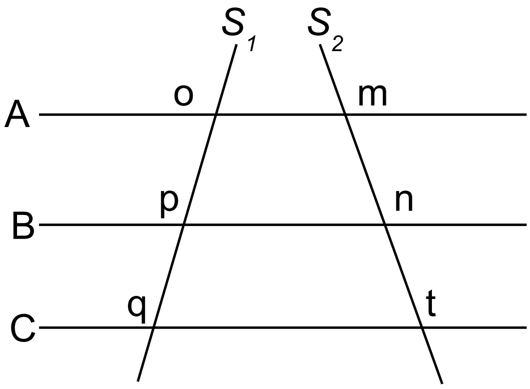
Teorema 9.1.1. *(Thales) Si tres o más paralelas son cortadas por dos o más transversales, entonces la razón entre las longitudes de los segmentos determinados en una de las paralelas, es igual a la razón de las longitudes de los segmentos correspondientes determinados por las otras paralelas* — Ver Fig. *9.1.13.*

Gráficamente, el Teorema de Thales *afirma que:*

$$\frac{\overline{op}}{\overline{pq}} = \frac{\overline{mn}}{\overline{nt}}$$

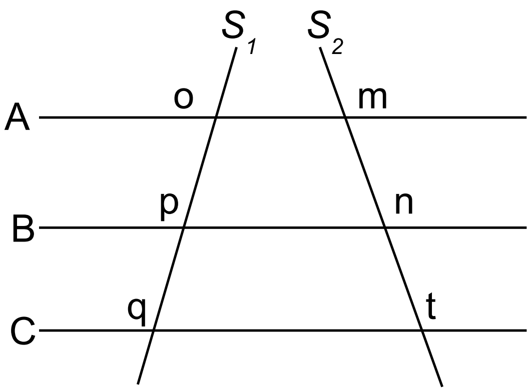
Teorema 9.1.2. *(Recíproco de Thales) Si tres rectas — de las cuales dos son paralelas — son cortadas por dos transversales de manera tal que dos segmentos cualesquiera sobre una de las transversales forman proporción con sus correspondientes sobre la otra, entonces la tercer recta es paralela a las otras dos* — Ver Fig. *9.1.14.*

Figura 9.1.13: TEOREMA DE THALES



La siguiente figura nos ayudará a ilustrar el TEOREMA DE THALES. En la misma, $A \parallel B \parallel C$ y S_1 y S_2 son transversales.

Figura 9.1.14: TEOREMA RECÍPROCO DE THALES



La siguiente figura nos ayudará a ilustrar el TEOREMA DE THALES. En la misma, $A \parallel B$ y S_1 y S_2 son transversales. Lo que afirma el teorema recíproco de Thales es que si:

$$\frac{\overline{op}}{\overline{pq}} = \frac{\overline{mn}}{\overline{nt}}$$

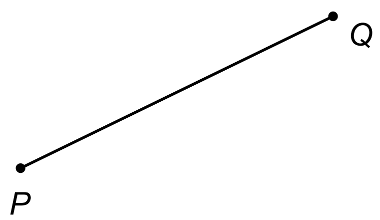
entonces necesariamente debe ser $A \parallel B \parallel C$

9.1.4.3. Problemas que se resuelven mediante el Teorema de Thales

Es interesante estudiar el tipo de problemas que pueden llegar a resolverse a partir del Teorema de Thales, y evidentemente son problemas que aluden a la proporcionalidad de segmentos. A lo largo de esta sección iremos dilucidando algunos de estos problemas, que servirán como ejemplo para luego poder resolver las actividades propuestas en la sección de ejercicios y problemas.

Una de las aplicaciones más interesantes del Teorema de Thales es la posibilidad de dividir un segmento en partes iguales aprovechando las condiciones de proporcionalidad que plantea dicho teorema.

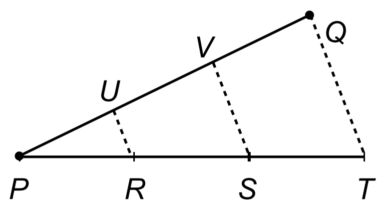
Problema 9.1.1. Considere el segmento $\overline{PQ}$ de la siguiente figura:



Mediante el Teorema de Thales divida dicho segmento en tres partes iguales.

Solución:

Es posible utilizar el Teorema de Thales para efectuar la división de este segmento en tres partes iguales. Procedemos como sigue ayudados por la siguiente figura:



1. Construimos arbitrariamente tres segmentos iguales $\overline{PR}$, $\overline{RS}$ y $\overline{ST}$.
2. Unimos los puntos Q y T formando el segmento $\overline{QT}$ que se muestra en la figura en línea punteada.
3. Construimos los segmentos $\overline{VS}$ y $\overline{UR}$ paralelos al $\overline{QT}$.
4. A partir del Teorema de Thales sabemos que:

$$\frac{\overline{VQ}}{\overline{UV}} = \frac{\overline{ST}}{\overline{RS}} \qquad \frac{\overline{UV}}{\overline{PU}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{PR}}$$

Como $\overline{ST} = \overline{RS}$ y $\overline{RS} = \overline{PR}$ entonces las razones:

$$\frac{\overline{ST}}{\overline{RS}} = 1 = \frac{\overline{RS}}{\overline{PR}}$$

y por lo tanto:

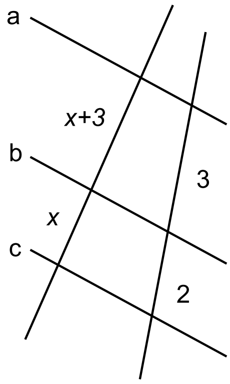
$$\frac{\overline{VQ}}{\overline{UV}} = 1 = \frac{\overline{UV}}{\overline{PU}}$$

y esto nos permite deducir que:

$$\overline{VQ} = \overline{UV} = \overline{PU}$$

Luego: Hemos determinado puntos U y V sobre el segmento $\overline{PQ}$ de tal forma que $\overline{PU} = \overline{UV} = \overline{VQ}$ y por lo tanto dichos puntos dividen al segmento $\overline{PQ}$ en tres partes iguales.

Problema 9.1.2. Halle el valor de x en la situación que describe la siguiente figura, teniendo presente que $a \parallel b \parallel c$.



Solución:

Como las rectas a, b y c son paralelas entonces podemos utilizar el Teorema de Thales para determinar el valor de x, estableciendo la igualdad entre las proporciones:

$$\frac{x+3}{x} = \frac{3}{2}$$

Operando en la igualdad anterior se tiene:

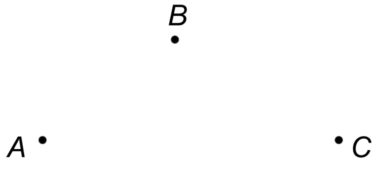
$$\begin{aligned} 2(x+3) &= 3x \\ \Leftrightarrow 2x+6 &= 3x \\ \Leftrightarrow 3x-2x &= 6 \\ \Leftrightarrow x &= 6 \end{aligned}$$

Luego: El valor de la incógnita es $x = 6$.

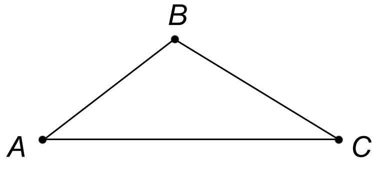
9.1.5. Triángulos

9.1.5.1. Definición de Triángulo - Convenciones

Consideremos tres puntos A, B y C del plano que no estén alineados, por ejemplo los que se pueden observar en la siguiente figura:



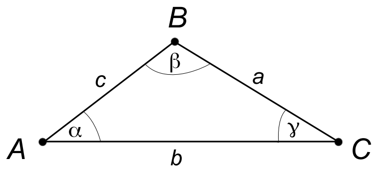
Si unimos los puntos A y B mediante un segmento y procedemos de forma análoga para unir B con C y luego C con A, la figura resultante se denomina *triángulo*, y lo notamos en lenguaje matemático como $\overset{\triangle}{ABC}$:



En un triángulo quedan determinados tres ángulos interiores, que usualmente podemos designar mediante letras griegas correspondientes a las letras de los vértices. En el caso de la figura serían los ángulos α, β y γ. También es usual indicar cada uno de los ángulos a partir de la letra mayúscula utilizada para referirse al vértice que forma dicho ángulo. Por ejemplo, en este caso hablaríamos de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$.

Para referirnos a los lados de un triángulo suelen haber varias convenciones también, siendo común referirse a ellos mediante la notación de segmentos. El triángulo de más arriba tiene como lados a los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$. Sin embargo, como es engorrosa esta escritura, muchas veces suelen utilizarse letras minúsculas para referirse a los lados, en cuyo caso también hay convenciones. Por ejemplo al lado $\overline{BC}$ también suele llamársele a, pues dicho lado se opone al ángulo $\hat{A}$; al lado $\overline{CA}$ suele llamársele b; y al lado $\overline{AB}$ suele llamársele c.

Podemos resumir todo lo anterior en la siguiente figura:



9.1.5.2. Clasificación de Triángulos

Los triángulos se clasifican según las características de sus lados y ángulos. Si consideráramos un triángulo $A\overset{\triangle}{B}C$ como el de la figura anterior, entonces se dirá:

Equilátero: Si sus tres lados a, b y c son iguales.

Isóceles: Si dos de sus lados son iguales, aunque probablemente el tercero no lo sea.

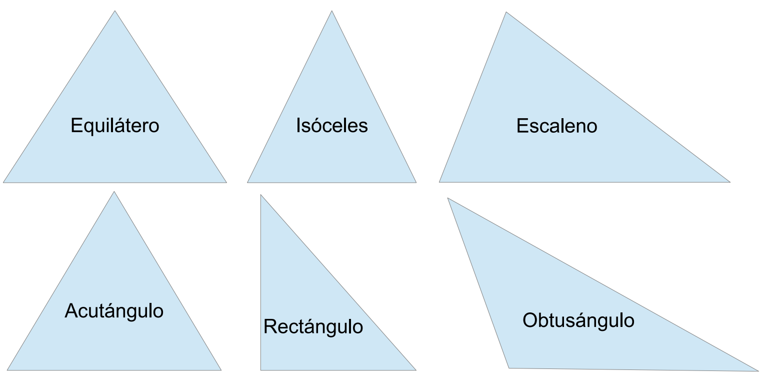
Escaleno: Si sus tres lados son distintos.

Acutángulo: Si todos sus ángulos son agudos.

Rectángulo: Si uno de sus ángulos es recto.

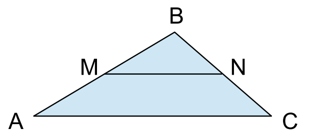
Obtusángulo: Si alguno de sus ángulos es superior a 90°.

En la figura a continuación hay ejemplos de los diferentes tipos de triángulos:



9.1.5.3. Base media de un triángulo

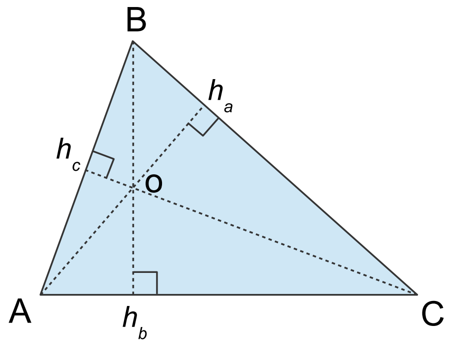
Los segmentos que unen los puntos medios de dos lados de un triángulo se llaman *bases medias* del triángulo:



En este sentido $\overline{MN}$ sería la *base media* del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ con respecto a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

9.1.5.4. Alturas de un Triángulo

En cada triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ se definen tres alturas, una para cada uno de sus lados:



Por ejemplo, el lado a es el que se opone al ángulo A y corresponde al segmento $\overline{BC}$. El punto h_a perteneciente a dicho segmento determina otro segmento perpendicular al mismo que en el dibujo es el $\overline{Ah_a}$. Esa es la altura correspondiente al lado a.

Las demás alturas se definen de forma análoga y es posible observar en el gráfico de más arriba que las tres alturas se cortan en un punto común que llamamos o.

9.1.5.5. Área de un Triángulo

Consideremos un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ como el de la figura de la sección anterior. Si elegimos uno cualquiera de sus lados al que llamaremos *base* y la *altura* correspondiente al mismo, entonces el área de dicho triángulo se define según:

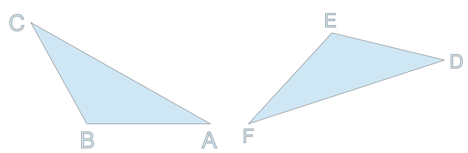
$$\text{Área}\left(\overset{\triangle}{ABC}\right) = \frac{base \times altura}{2}$$

Observemos que hay tres formas de calcular el área de un triángulo según elijamos la base y su altura correspondiente:

$$\text{Área} = \frac{a \times h_a}{2} = \frac{b \times h_b}{2} = \frac{c \times h_c}{2}$$

9.1.5.6. Congruencia de Triángulos

En el plano es posible dibujar dos triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{DEF}$ y que dichos triángulos sean figuras idénticas, tal como puede verse en la figura a continuación, donde se aprecia que el triángulo $\overset{\triangle}{DEF}$ puede ser obtenido simplemente rotando y desplazando al triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$:



¿Pero qué quiere decir que son figuras idénticas? En realidad quiere decir que si recortáramos ambas figuras y las superpusiéramos adecuadamente, entonces dichas figuras coincidirían. En geometría el término adecuado para referirnos a esto es el de *congruencia*. En este sentido diremos que $\overset{\triangle}{ABC}$ es *congruente* a $\overset{\triangle}{DEF}$ y lo notamos $\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF}$.

Definición 9.1.10. Cuando dos triángulos como los anteriores resulten congruentes, llamaremos *lados homólogos* a *ángulos homólogos* aquellos que sean congruentes entre las dos figuras. Por ejemplo el lado $\overline{AB}$ es homólogo al $\overline{DE}$ y ángulo $\overset{\angle}{ABC}$ es homólogo al $\overset{\angle}{DEF}$. Observemos que si dos lados o ángulos son homólogos, entonces resultan congruentes. Por lo tanto, las partes homólogas entre ambas figuras son aquellas coincidentes.

Para establecer si dos triángulos son congruentes hay cuatro criterios fundamentales:

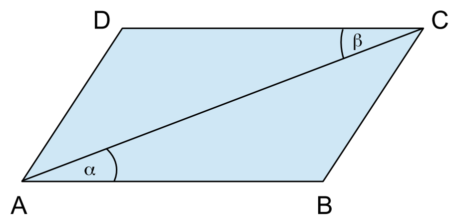
1. **LAL:** Dos triángulos son congruentes si dos de sus lados tienen la misma longitud de sus homólogos, y el ángulo comprendido entre ellos tiene la misma medida de su homólogo.

2. **ALA:** Si dos ángulos y el lado entre ellos son respectivamente congruentes con los mismos de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

3. **LLL:** Si en dos triángulos los tres lados de uno son respectivamente congruentes con los del otro, entonces los triángulos son congruentes.

4. **LLA:** Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

Ejemplo 9.1.1. Considere la siguiente figura:



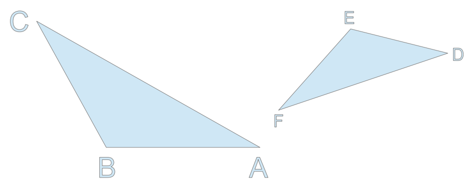
Donde $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y los ángulos α y β son congruentes. Demostrar que los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{CDA}$ son congruentes, indicando qué criterio se utilizó.

Sol:

Por hipótesis, los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y los ángulos α y β son congruentes. Como además el lado $\overline{AC}$ es común a ambos triángulos, entonces por aplicación inmediata del criterio **LAL**, resultan congruentes.

9.1.5.7. Semejanza de Triángulos

En el plano es posible dibujar dos triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{DEF}$ y que dichos triángulos sean figuras *proporcionales*, tal como puede verse en la figura a continuación, donde se aprecia que el triángulo $\overset{\triangle}{DEF}$ puede ser obtenido simplemente rotando, desplazando y escalando al triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$:



Cuando dos triángulos son proporcionales sus ángulos homólogos son congruentes, pero sus lados homólogos no tienen por qué ser congruentes, aunque existe un factor de proporcionalidad $k > 0 \in \mathbb{R}$ entre ellos que verifica:

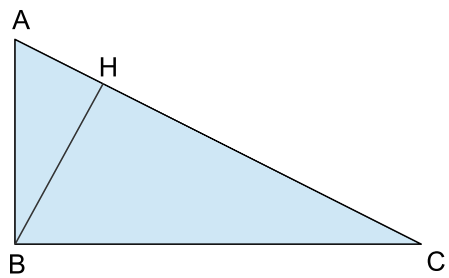
$$\overline{AB} = k \cdot \overline{DE} \qquad \overline{BC} = k \cdot \overline{EF} \qquad \overline{CA} = k \cdot \overline{FD}$$

En geometría el término adecuado para referirnos a esta relación entre dos triángulos es el de *semejanza*. En este sentido diremos que $\overset{\triangle}{ABC}$ es *semejante* a $\overset{\triangle}{DEF}$ y lo notamos $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{DEF}$. Al número real positivo k se lo llama *razón de semejanza*.

Para establecer si dos triángulos son *semejantes* hay cuatro criterios fundamentales:

1. **LAL:** Dos triángulos son semejantes si dos de sus lados homólogos son proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es congruente.
2. **AA:** Si tienen dos ángulos homólogos congruentes entonces ambos triángulos son semejantes.
3. **LLL:** Si los tres pares de lados homólogos son proporcionales.
4. **LLA:** Si tienen dos lados homólogos proporcionales y el ángulo opuesto al mayor de ellos es congruente.

Ejemplo 9.1.2. En la figura a continuación el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ es rectángulo en $\overset{\angle}{B}$ y $\overline{BH}$ es la altura correspondiente al lado $\overline{AC}$:



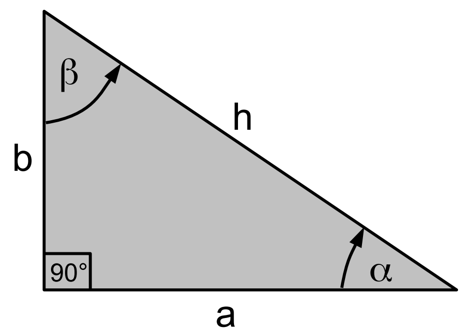
Demostrar que $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AHB}$, indicando qué criterio de semejanza se utilizó.

Sol:

Como $\overline{BH}$ es la altura correspondiente al lado $\overline{AC}$ del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, entonces $\overset{\angle}{AHB} = 90°$. Por otra parte, el ángulo $\overset{\angle}{ABC} = 90°$ también. Además $\overset{\angle}{HAB} = \overset{\angle}{CAB}$ pues el punto H está sobre el lado $\overline{AC}$. Pero entonces los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{AHB}$ tienen dos ángulos homólogos congruentes, y por lo tanto mediante el criterio **AA** resultan semejantes.

9.1.5.8. Triángulos Rectángulos

Un *triángulo rectángulo* es un triángulo donde uno de sus ángulos es recto, es decir de 90°:



Aunque más adelante nos ocuparemos de este tipo de triángulos en profundidad, en esta sección enumeraremos algunas de sus propiedades importantes, pues las necesitaremos más adelante cuando veamos *polígonos regulares*.

En un triángulo rectángulo los lados adyacentes al ángulo recto se llaman *catetos* y el lado restante se llama *hipotenusa*. En la figura de más arriba a, y b son los *catetos* y h la *hipotenusa*.

Una de las propiedades fundamentales de cualquier triángulo rectángulo es que la relación entre los catetos y la hipotenusa está dada por:

$$a^2 + b^2 = h^2$$

es decir la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. Esto se conoce como Teorema de Pitágoras.

El ángulo α es el *adyacente* al cateto a y *opuesto* al cateto b. Recíprocamente el ángulo β es *adyacente* al cateto b y *opuesto* al cateto a.

Las razones entre los diferentes lados de un triángulo rectángulo se relacionan con sus ángulos de la siguiente forma:

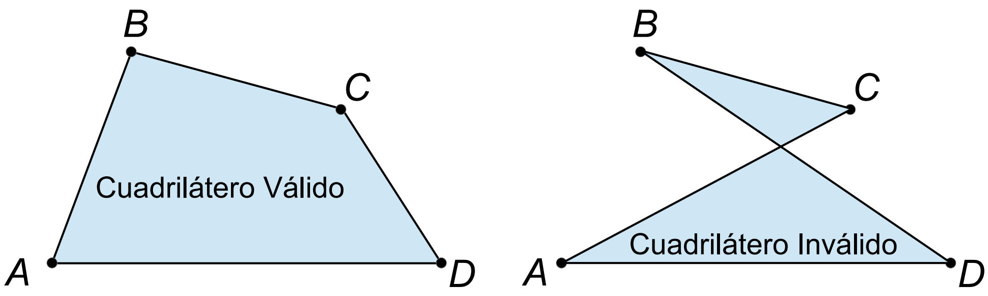
$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{b}{h} \qquad \cos(\alpha) = \frac{a}{h} \qquad \tan(\alpha) = \frac{b}{a}$$
$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{a}{h} \qquad \cos(\beta) = \frac{b}{h} \qquad \tan(\beta) = \frac{a}{b}$$

Observemos que en todos los casos ya sea para α o para β se cumple que:

$$\operatorname{sen} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

9.1.6. Cuadriláteros

Definición 9.1.11. Dados cuatro puntos A, B, C y D no alineados de a tres, se define al cuadrilátero $\overset{\square}{ABCD}$ como la figura plana cuyos vértices son esos cuatro puntos y sus lados son los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ respectivamente. Se supone que los lados no se intersecan, y que los únicos puntos de contacto entre ellos son los vértices:

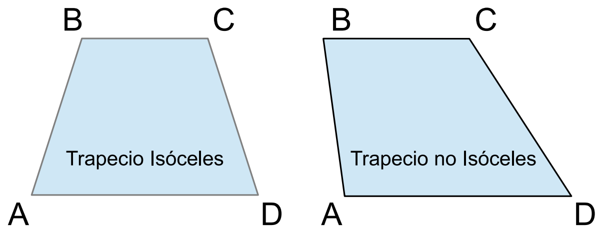


Observemos que aunque los vértices A, B, C y D determinan el cuadrilátero bien construido $\overset{\square}{ABCD}$, si uniéramos los puntos en otro orden la figura resultante podría no ser un cuadrilátero válido, como ocurre en la figura $ACBD$ de la derecha. Dicha figura agrega un vértice cuando se produce la intersección entre los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, obteniéndose en lugar de un cuadrilátero dos triángulos que se tocan en un vértice común.

9.1.6.1. Clasificación

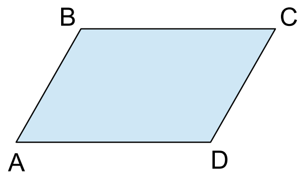
Dependiendo de las relaciones que se den entre los lados de un cuadrilátero es posible hacer una clasificación:

- Un cuadrilátero es un *trapecio* si y sólo si tiene al menos un par de lados opuestos paralelos:

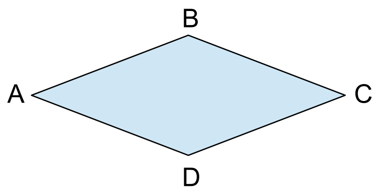


  - Un trapecio es *isóceles* cuando sus lados opuestos no paralelos son congruentes.

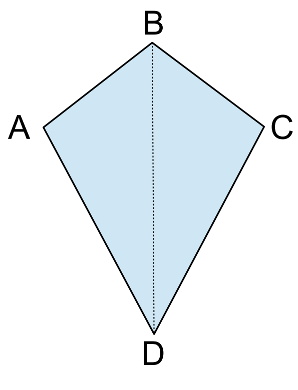
- Un cuadrilátero es un *paralelogramo* si y sólo si tiene sus dos pares de lados opuestos paralelos:



- Un cuadrilátero es un *rombo* si y sólo si tiene sus cuatro lados congruentes:



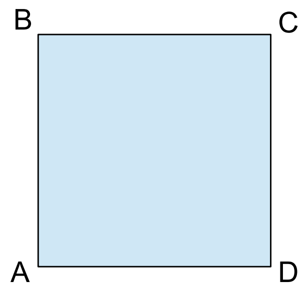
- Un cuadrilátero es un *romboide* si y sólo si tiene un par de lados consecutivos congruentes y el otro par de lados congruentes, aunque no necesariamente iguales a los dos primeros:



  En un romboide, la diagonal que une los vértices a los que concurren los lados congruentes se llama *diagonal principal*.

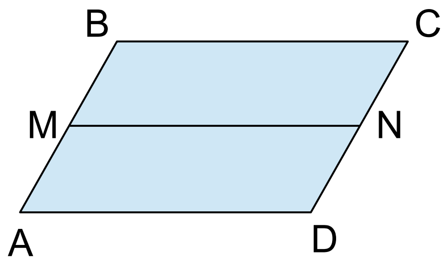
- Un cuadrilátero es un *rectángulo* si y sólo si tiene sus cuatro ángulos rectos:

- Un cuadrilátero es un *cuadrado* si y sólo si es rectángulo y es rombo:



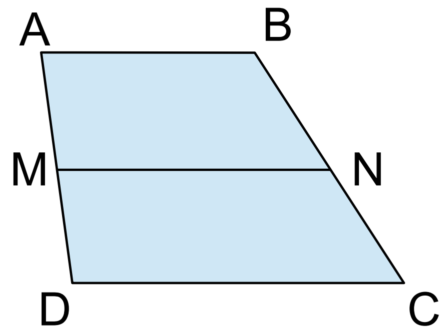
9.1.6.2. Base media de un paralelogramo

Si en el paralelogramo $\overset{\square}{ABCD}$ llamamos M al punto medio del segmento $\overline{AB}$ y N al punto medio del segmento $\overline{CD}$, entonces diremos que $\overline{MN}$ es la *base media* del paralelogramo:



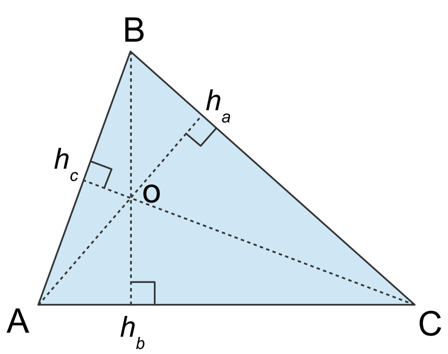
9.1.6.3. Base media de un trapecio

Si $\overset{\square}{ABCD}$ es un trapecio con $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, M es el punto medio de $\overline{AD}$ y N el punto medio de $\overline{BC}$, diremos que $\overline{MN}$ es la *base media* del trapecio con respecto a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$:



9.1.6.4. Cálculo de Áreas

En esta sección desarrollaremos ciertas ideas básicas para determinar las áreas de los cuadriláteros más importantes. Recordemos primero que en un triángulo cualquiera, cualquiera de sus lados y la altura correspondiente a ese lado nos permite calcular su área mediante la siguiente expresión:



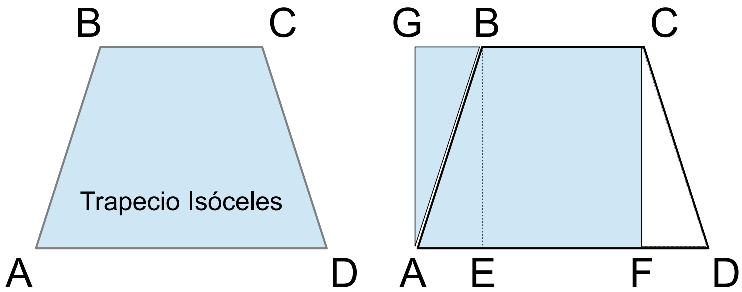
$$\text{Área} = \frac{a \times h_a}{2} = \frac{b \times h_b}{2} = \frac{c \times h_c}{2}$$

En el caso de un rectángulo el área se define mediante la expresión *base* $\times$ *altura*:

$$\text{Área} = \overline{AD} \times \overline{AB} = base \times altura$$

9.1.6.5. Área de un Trapecio Isóceles

Consideremos la siguiente figura:



Consideremos el punto E sobre el segmento $\overline{AD}$ de tal forma que $\overline{EB} \perp \overline{AD}$. El segmento $\overline{EB}$ se llama *altura* del trapecio isóceles $A\overset{\square}{B}CD$. El segmento $\overline{AD}$ es su *base mayor* y el segmento $\overline{BC}$ es su *base menor*. Ubiquemos además el punto F también sobre el segmento $\overline{AD}$ de tal forma que $\overline{FC} \perp \overline{AD}$. En la figura quedaron determinados tres triángulos congruentes:

$$D\overset{\triangle}{F}C \cong A\overset{\triangle}{E}B \cong B\overset{\triangle}{G}A$$

Por otra parte, del gráfico se desprende que el área del trapecio $A\overset{\square}{B}CD$ es igual al área del rectángulo $A\overset{\square}{G}CF$.

Y como además:

$$\begin{aligned}
\overline{AD} &= \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FD} \\
\overline{EF} &= \overline{BC} \\
\overline{AE} &= \overline{FD} = \overline{GB}
\end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\overline{AD} &= \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FD} \\
&= \overline{AE} + \overline{BC} + \overline{AE} \\
&= 2\overline{AE} + \overline{BC}
\end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$\boxed{\overline{AE} = \overline{FD} = \overline{GB} = \frac{\overline{AD} - \overline{BC}}{2}}$$

El área del rectángulo $A\overset{\square}{G}CF$ se puede calcular multiplicando su base por su altura:

$$
\begin{aligned}
\text{Área}\left(A\overset{\square}{G}CF\right) &= \overline{AF} \times \overline{EB} \\
&= \left(\overline{AE} + \overline{EF}\right) \times \overline{EB} \\
&= \left(\frac{\overline{AD} - \overline{BC}}{2} + \overline{BC}\right) \times \overline{EB} \\
&= \left(\frac{\overline{AD} - \overline{BC} + 2\overline{BC}}{2}\right) \times \overline{EB} \\
&= \left(\frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}\right) \times \overline{EB}
\end{aligned}
$$

Y como el área de aquel rectángulo equivale al área del trapecio original, entonces:

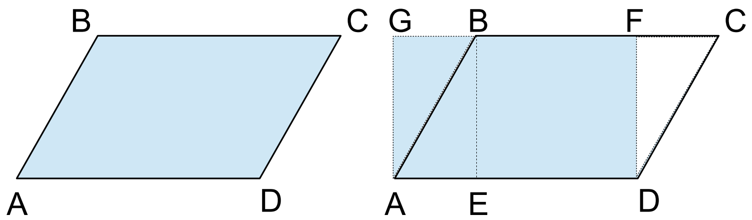
$$\text{Área}\left(A\overset{\square}{B}CD\right) = \left(\frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}\right) \times \overline{EB}$$

Si tenemos en cuenta que $\overline{AD}$ es la *base mayor*, $\overline{BC}$ es la *base menor* y que $\overline{EB}$ es la *altura*, entonces obtenemos la conocida fórmula:

$$\text{Área}\left(A\overset{\square}{B}CD\right) = \frac{\text{base mayor} + \text{base menor}}{2} \times \text{altura}$$

9.1.6.6. Área de un Paralelogramo

Consideremos la siguiente figura:



Consideremos el punto E sobre el segmento $\overline{AD}$ elegido de tal forma que $\overline{EB} \perp \overline{AD}$. El segmento $\overline{EB}$ es la *altura* del paralelogramo. El punto F sobre el segmento $\overline{BC}$ se elige de forma tal que $\overline{DF} \perp \overline{BC}$. De esta manera resultan tres triángulos congruentes:

$$A\overset{\triangle}{E}B \cong C\overset{\triangle}{F}D \cong B\overset{\triangle}{G}A$$

Como $\overline{BG} = \overline{CF} = \overline{AE}$ y $\overline{ED} = \overline{BF}$ entonces el cuadrilátero $A\overset{\square}{D}FG$ es un rectángulo de base $\overline{AD}$ y altura $\overline{EB}$ cuya área es igual al área del paralelogramo $A\overset{\square}{B}CD$.

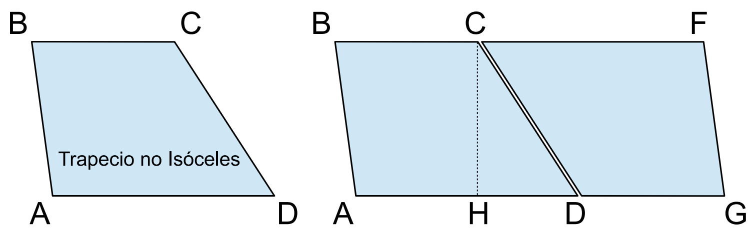
De esta forma resulta:

$$\text{Área}\left(A\overset{\square}{B}CD\right) = \overline{AD} \times \overline{EB} = \text{base} \times \text{altura}$$

que es la conocida expresión para determinar el área de un paralelogramo.

9.1.6.7. Área de un Trapecio no Isóceles

Consideremos el siguiente gráfico:



Lo que hicimos fue ubicar sobre la semirrecta $\overrightarrow{BC}$ un punto F de tal forma que $\overline{CB} = \overline{AD}$. Luego ubicamos sobre la semirrecta $\overrightarrow{AD}$ al punto G de forma tal que $\overline{DB} = \overline{BC}$. Por último elegimos H sobre el segmento $\overline{AD}$ de tal forma que $\overline{HC} \perp \overline{AD}$. El cuadrilátero $\overset{\square}{AGFB}$ es un paralelogramo cuya base es el segmento $\overline{AG}$ de medida $\overline{AD} + \overline{BC}$ y cuya altura es la misma que la del trapecio no isóceles original y está dada por $\overline{HC}$.

El área del paralelogramo $\overset{\square}{AGFB}$ se calcula según:

$$\text{Área}\left(\overset{\square}{AGFB}\right) = \left(\overline{AD} + \overline{BC}\right) \times \overline{HC}$$

y es el doble que el área del trapecio original.

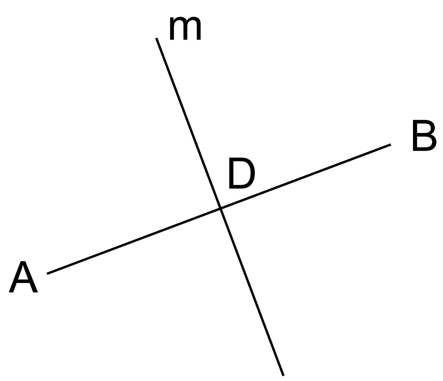
Si además tenemos presente que $\overline{AD}$ es la *base mayor* de dicho trapecio, $\overline{BC}$ es su *base menor* y $\overline{HC}$ su altura, entonces:

$$\begin{aligned}
\text{Área}\left(\overset{\square}{ABCD}\right) &= \frac{\left(\overline{AD} + \overline{BC}\right)}{2} \times \overline{HC} \\
&= \frac{(\text{base mayor} + \text{base menor})}{2} \times \text{altura}
\end{aligned}$$

Lo que observamos entonces que en cualquier trapecio, ya sea isóceles o no, el área se calcula mediante la misma expresión que es el promedio entre la base mayor y la base menor, multiplicado por la altura.

9.1.6.8. Mediatriz de un Segmento

Dado un segmento $\overline{AB}$ se define a la *mediatriz* de dicho segmento como la recta m que es perpendicular al mismo y que pasa por un punto D perteneciente al mismo que lo divide en dos partes iguales, es decir de tal forma que $\overline{AD} = \overline{AB}$:



9.1.6.9. El Método Geométrico en las Demostraciones

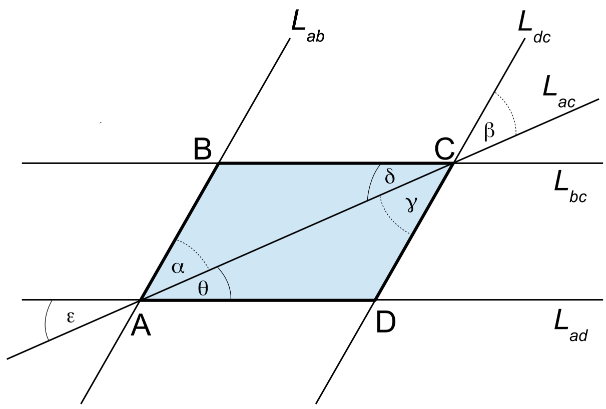
En esta sección se abordarán una serie de problemas clásicos de geometría en relación con los cuadriláteros, los cuales servirán para ejercitar la manera de hacer demostraciones en geometría. El estudiante deberá prestar especial atención a las construcciones hechas en los desarrollos, para poder aplicar lo aprendido en la resolución de las actividades propuestas en la serie de problemas y ejercicios de este capítulo.

Problema 9.1.3. Demostrar que en todo paralelogramo se cumple que:

1. Los lados opuestos son congruentes.
2. Los ángulos opuestos son congruentes.
3. Las diagonales se cortan en un punto o que las divide mutuamente en partes iguales.

Sol:

1. Consideremos el siguiente gráfico:



La recta L_{ab} es aquella que contiene al segmento $\overline{AB}$ y L_{dc} contiene al segmento $\overline{DC}$. Como $A\overset{\square}{B}CD$ es un paralelogramo entonces L_{ab} // L_{dc}. Lo mismo para las rectas L_{bc} // L_{ad}. La recta L_{ac} contiene al segmento $\overline{AC}$ que es una de las diagonales del paralelogramo, y divide al mismo en dos triángulos: $A\overset{\triangle}{B}C$ y $A\overset{\triangle}{D}C$.

El ángulo α es congruente al ángulo β por ser correspondientes entre paralelas. Y el ángulo γ es congruente a β por ser opuestos por el vértice. Pero entonces $\alpha = \gamma$.

El ángulo δ es congruente a ε por ser correspondientes entre paralelas y θ es congruente a ε por ser opuestos por el vértice. Pero entonces $\theta = \delta$.

Por otra parte el segmento $\overline{AC}$ es común a ambos triángulos $A\overset{\triangle}{B}C$ y $A\overset{\triangle}{D}C$. Pero entonces dichos triángulos tienen un lado en común y los ángulos adyacentes a dicho lado congruentes. Por el criterio **ALA** entonces:

$$A\overset{\triangle}{B}C \cong A\overset{\triangle}{D}C$$

Pero esto significa que $\overline{AD} = \overline{BC}$ y $\overline{AB} = \overline{DC}$, con lo que hemos demostrado que los lados opuestos son congruentes.

2. A partir de lo razonado en el punto anterior vemos que:

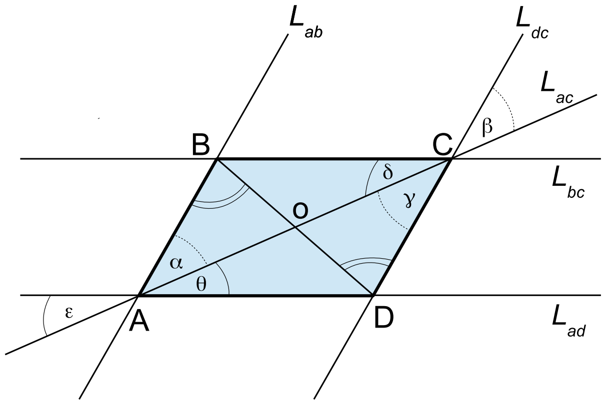
$$\hat{A} = \alpha + \theta \qquad \alpha = \gamma$$
$$\hat{B} = \gamma + \delta \qquad \delta = \theta$$

Pero entonces:

$$\hat{A} = \alpha + \theta = \gamma + \delta = \hat{B}$$

Y por otra parte $\hat{B} = \hat{D}$ por ser congruentes los triángulos $A\overset{\triangle}{B}C$ y $A\overset{\triangle}{D}C$.

3. Agreguemos al gráfico anterior la otra diagonal e indiquemos por o al punto de intersección entre ambas:



Mediante un razonamiento idéntico al hecho al principio para establecer que $A\overset{\triangle}{B}C \cong A\overset{\triangle}{D}C$ es posible inferir que $B\overset{\triangle}{A}D \cong B\overset{\triangle}{C}D$. Pero entonces el ángulo $A\hat{B}D \cong C\hat{D}B$. Y además ya sabíamos que $\alpha = \gamma$ y $\overline{AB} = \overline{DC}$. Aplicando el criterio de congruencia **ALA** a los triángulos $A\overset{\triangle}{B}o$ y $C\overset{\triangle}{D}o$resulta que:

$$A\overset{\triangle}{B}o \cong C\overset{\triangle}{D}o$$

lo que implica que:

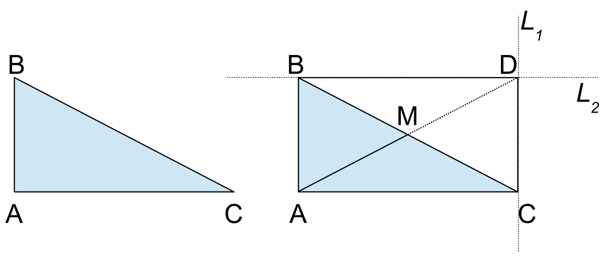
$$\overline{Bo} = \overline{oD}$$

Un razonamiento similar aplicado a los triángulos $A\overset{\triangle}{D}o$ y $C\overset{\triangle}{B}o$ permite concluir que $\overline{Ao} = \overline{oC}$, lo cual termina la demostración.

Problema 9.1.4. Sea $B\overset{\triangle}{A}C$ un triángulo rectángulo en A y M un punto sobre el lado $\overline{BC}$ de forma tal que $\overline{BM} = \overline{MC}$. Demostrar que entonces el triángulo $A\overset{\triangle}{M}C$ es isóceles.

Sol:

Consideremos el siguiente gráfico que representa al triángulo $A\overset{\triangle}{B}C$ del lado izquierdo y del lado derecho una construcción que haremos a continuación:



Sea el triángulo $A\overset{\triangle}{B}C$ rectángulo en $\hat{A}$ tal como dice el enunciado. Consideremos la recta L_1 paralela al lado $\overline{AB}$ que pasa por el punto C y la recta L_2 paralela al lado $\overline{AC}$ que pasa por el punto B. Dichas rectas se cortan en un punto al que llamaremos D, el cual determina un ángulo recto en virtud de que $\overline{AC} \perp \overline{AB}$. El cuadrilátero $A\overset{\square}{B}DC$ es rectángulo claramente pues todos los ángulos que determinan sus vértices son rectos.

Los rectángulos son un caso particular de paralelogramos, y en el problema anterior demostramos que:

$$A\overset{\triangle}{B}M \cong D\overset{\triangle}{C}M \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\overline{AB} = \overline{CD}}$$

$$A\overset{\triangle}{C}M \cong D\overset{\triangle}{B}M \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\overline{AC} = \overline{BD}}$$

También demostramos que las diagonales $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ se cortan en un punto M que las divide en partes iguales. Ese punto M necesariamente debe ser el que alude el enunciado, pues cumple con dividir al lado $\overline{BC}$ en partes iguales. Y según esto, el punto M verifica:

$$\overline{BM} = \overline{MC}$$
$$\overline{AM} = \overline{MD}$$

Consideremos ahora los triángulos $B\overset{\triangle}{A}C$ y $C\overset{\triangle}{D}B$. Tienen dos lados homólogos congruentes pues antes vimos que $\overline{BA} = \overline{CD}$ y $\overline{AC} = \overline{DB}$ y además el ángulo comprendido entre estos lados es 90°. Aplicando el criterio de congruencia **LAL** concluimos que:

$$B\overset{\triangle}{A}C \cong C\overset{\triangle}{D}B$$

pero entonces sus diagonales son también congruentes:

$$\overline{AD} = \overline{BC}$$

Juntando esto con el hecho de que el punto M divide a ambas diagonales en partes iguales, concluimos que:

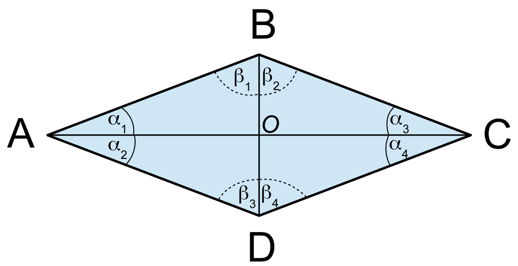
$$\overline{BM} = \overline{MC} = \overline{AM} = \overline{MD}$$

En particular $\overline{AM} = \overline{MC}$ de donde el triángulo $A\overset{\triangle}{M}C$ es isóceles, tal como queríamos demostrar.

Problema 9.1.5. Las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente.

Sol:

Consideremos el siguiente gráfico:



Para empezar, observemos que según el criterio de congruencia **LLL** entonces $A\overset{\triangle}{B}C \cong A\overset{\triangle}{D}C$ pues tienen sus tres lados homólogos congruentes. Además, como ambos triángulos son isóceles, entonces los ángulos adyacentes a sus lados desiguales deben ser también congruentes, lo que implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$.

El mismo razonamiento se aplica a los triángulos $D\overset{\triangle}{B}A$ y $D\overset{\triangle}{B}C$, por lo que son a su vez congruentes y vale que $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$.

Comparemos ahora los triángulos $A\overset{\triangle}{o}B$ y $C\overset{\triangle}{o}B$. Como $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\alpha_1 = \alpha_3$ y $\beta_1 = \beta_2$ entonces por el criterio **ALA** concluimos que $A\overset{\triangle}{o}B \cong C\overset{\triangle}{o}B$.

Razonando análogamente con los demás triángulos pequeños, concluimos que todos ellos son congruentes.

Como todos los triángulos pequeños son congruentes, eso significa que los siguientes ángulos son todos congruentes:

$$A\hat{o}B \cong C\hat{o}B \cong C\hat{o}D \cong A\hat{o}D$$

Esos cuatro ángulos son adyacentes y la suma entre ellos debe ser 360°, y como son todos congruentes entonces cada uno debe valer 90°.

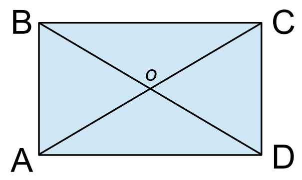
Pero eso es precisamente lo que queríamos demostrar.

Observación 9.1.2. Aunque en la demostración del problema anterior no lo mencionamos, al ser $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ y $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$ entonces se desprende que en un rombo las diagonales son bisectrices de los ángulos opuestos. Por otra parte, como los cuatro triángulos pequeños son todos congruentes entre sí, también se desprende inmediatamente que las diagonales se cortan en un punto "o" que las divide mutuamente en partes iguales. Y como evidentemente los lados opuestos son congruentes, entonces los rombos tienen las mismas propiedades que los paralelogramos sólo que además sus diagonales se cortan determinando ángulos rectos. En realidad los rombos son aquellos paralelogramos que además cumplen con esta propiedad, es decir que si en un paralelogramo las diagonales se cortan determinando ángulos rectos, entonces necesariamente debe ser un rombo, tal como se les pedirá demostrar en el problema 8b.

Problema 9.1.6. Demostrar que si el punto de intersección de las diagonales de un cuadrilátero equidista de los vértices, entonces es un rectángulo.

Sol:

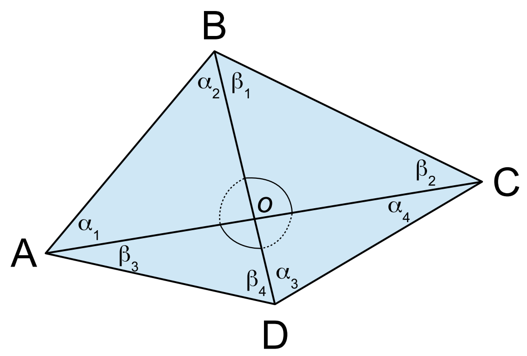
Utilizaremos este problema para mencionar algo muy importante en relación con la manera en que se hacen los dibujos para guiar las demostraciones geométricas. Nosotros queremos demostrar que si se cumplen las hipótesis entonces el cuadrilátero necesariamente debe ser un rectángulo. Pero si para guiar la demostración dibujamos un rectángulo para empezar a argumentar:



entonces se corre el riesgo de interpretar mal la información. Por ejemplo, si inferimos que $\overline{AB} = \overline{CD}$ — *porque en el dibujo eso es claro* — entonces estaríamos cometiendo un grave error. Pues en nuestras hipótesis jamás se dijo que esos segmentos fueran iguales en el cuadrilátero del enunciado, sólo que nosotros lo estaríamos dando por sentado por el hecho de que el gráfico que hicimos nos confunde.

Igualmente mal estaría decir que obviamente es un rectángulo porque los cuatro ángulos $B\hat{A}D$, $A\hat{D}C$, $D\hat{C}B$ y $C\hat{B}A$ son rectos. ¡Eso es lo que queremos demostrar, no la hipótesis! ¿Por qué estamos tentados a dar por sentada esa información? Sencillamente porque el rectángulo de más arriba es una horrible elección de gráfico para empezar a trabajar, pues nos induce a perder de vista cuáles son las hipótesis, por el hecho de agregar información por sí mismo.

Hecha esta aclaración, el gráfico correcto para empezar sería éste:



En el extremo opuesto del primer gráfico éste ni siquiera cumple con las hipótesis, pero eso no supone ningún inconveniente pues es tan sólo un gráfico de referencia, y es preferible que sea así para no confundirnos ni inducirnos a dar por ciertas cuestiones cuya veracidad aún desconocemos. Lo que haremos a continuación es ir razonando para llegar, a partir de las hipótesis, a establecer que la figura de más arriba necesariamente debe ser un rectángulo.

Comencemos por observar que como el punto “o” equidista de los vértices, entonces:

$$\overline{Ao} = \overline{oC} = \overline{oB} = \overline{oD}$$

y en particular $\overline{BD} = \overline{AC}$ y el punto “o” las parte por la mitad a ambas.

Los triángulos $A\overset{\triangle}{o}D$ y $C\overset{\triangle}{o}B$son congruentes pues $\overline{Ao} = \overline{Co}$, $\overline{oD} = \overline{oB}$ y los ángulos $A\hat{o}D$ y $C\hat{o}B$ son congruentes por ser opuestos por el vértice. La congruencia entre estos dos triángulos es consecuencia inmediata del criterio **LAL**. Y como ambos triángulos son isóceles entonces $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$. Llamemos β a cualquiera de estos ángulos, para abreviar.

Los triángulos $A\overset{\triangle}{o}B$ y $C\overset{\triangle}{o}B$ son congruentes por la misma razón. Y como también son isóceles entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$. Llamemos α a cualquiera de estos ángulos, para abreviar.

Como los ángulos llamados α son todos iguales entre sí y lo mismo para los que llamamos β, entonces:

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \alpha + \beta$$

Para terminar consideremos el triángulo $A\overset{\triangle}{B}C$. Como la suma de sus ángulos interiores es 180° entonces:

$$\begin{aligned} 180 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 \\ &= \alpha + \alpha + \beta + \beta \\ &= 2\alpha + 2\beta \\ &= 2(\alpha + b) \\ &= 2 \cdot \hat{A} \end{aligned}$$

Pero entonces, despejando $\hat{A}$ en la ecuación anterior obtenemos que:

$$\boxed{\hat{A} = 90°}$$

y recordando que $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$ resultan ser:

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°$$

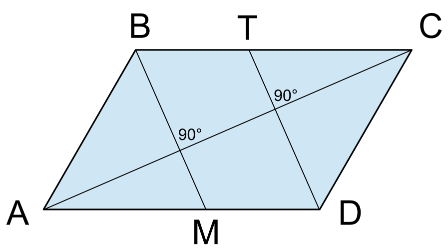
con lo que hemos demostrado que el cuadrilátero original es un rectángulo.

Observación: Recién ahora que hemos demostrado que el cuadrilátero es un rectángulo, estamos autorizados a graficarlo como hicimos en el primer dibujo.

Problema 9.1.7. Sea $A\overset{\square}{B}CD$ un paralelogramo. Se consideran M y T pertenecientes a $\overline{AC}$ tales que $\overline{BM} \perp \overline{AC}$ y $\overline{DT} \perp \overline{AC}$. Demostrar que $BT\overset{\square}{D}M$ es un paralelogramo.

Sol:

Comencemos graficando la situación que plantea el enunciado:



Como $\overline{BT} \subseteq \overline{BC}$ y $\overline{MD} \subseteq \overline{AD}$ y ya sabíamos que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, entonces es inmediato que $\overline{BT} \parallel \overline{MD}$.

Como $\overline{BM}$ y $\overline{TD}$ son perpendiculares ambas a la diagonal $\overline{AC}$, entonces es inmediato que también deben ser $\overline{BM} \parallel \overline{TD}$.

Pero entonces los lados opuestos de $BT\overset{\square}{D}M$ son paralelos, de lo cual se deduce inmediatamente que es un paralelogramo.

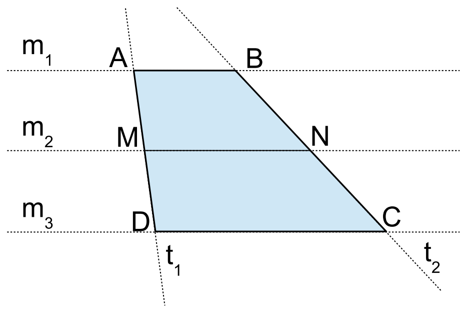
Problema 9.1.8. Si $\overline{MN}$ es la base media del trapecio $AB\overset{\square}{C}D$ con respecto a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, siendo $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, demostrar que entonces $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ y que:

$$\overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$$

es decir que la medida del segmento $\overline{MN}$ es el promedio entre las medidas de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

Sol:

Consideremos la siguiente figura:



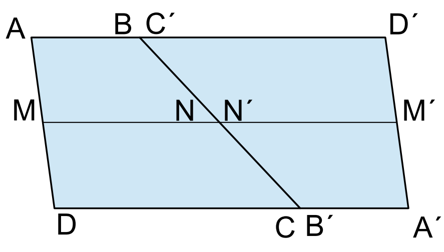
En el gráfico m_1, m_2 y m_3 son las rectas que contienen a los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{MN}$ y $\overline{DC}$ respectivamente y t_1 y t_2 las rectas que contienen a los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. La idea para la demostración consiste en interpretar a t_1 y t_2 como transversales de las rectas m_1, m_2 y m_3 para luego aplicar adecuadamente el Teorema Recíproco de Thales.

En efecto, como $\overline{MN}$ es base media del trapecio, entonces sabemos que $\overline{AM} = \overline{MD}$ y $\overline{BN} = \overline{NC}$. Pero entonces:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MD}} = 1 = \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}}$$

El Teorema Recíproco de Thales afirma que esto sólo puede ocurrir si $m_1 \parallel m_2 \parallel m_3$. Como $\overline{MN} \subseteq m_2$ y $\overline{DC} \subseteq m_3$ se deduce inmediatamente que $\overline{MN} \parallel \overline{DC}$, lo que concluye la primera parte de la demostración.

Para la segunda parte consideremos el siguiente gráfico, donde hemos rotado 180° el trapecio original para obtener un nuevo trapecio $A'B'\overset{\square}{C'}D'$, simétrico al primero donde el segmento $\overline{B'C'}$ se ha ubicado de forma tal que se superponga con el segmento $\overline{BC}$:



Como $\overline{B'C'}$ se superpone con $\overline{BC}$ entonces $\overline{AD} \parallel \overline{D'A'}$ y $\overline{AD'} \parallel \overline{DA'}$, razón por la cual $A'B'\overset{\square}{C'}D'$ es un paralelogramo.

Además, con respecto a las medidas de los lados:

$$\overline{MM'} = \overline{AD'} = \overline{DA'} = \overline{AB} + \overline{CD}$$
$$\overline{MM'} = \overline{MN} + \overline{M'N'} = 2 \cdot \overline{MN}$$

De las igualdades anteriores se deduce inmediatamente que:

$$2 \cdot \overline{MN} = \overline{AB} + \overline{CD}$$

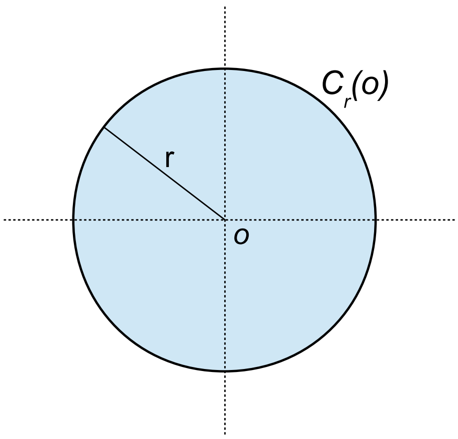
Y por lo tanto:

$$\overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$$

lo cual concluye la demostración.

9.1.7. Circunferencias

Si fijamos en el plano un punto "o" al que llamaremos *centro* y elegimos un número positivo $r > 0 \in \mathbb{R}$ al que llamaremos *radio*, se define a la *circunferencia de centro o y radio r* como:



$$C_r(o) = \left\{P \in \mathbb{R}^2 / d(P, o) = r\right\}$$

es decir como el conjunto de los puntos P del plano tales que su distancia al centro o es igual a r.

9.1.7.1. Cuerdas - Tangentes - Diámetros - Radios

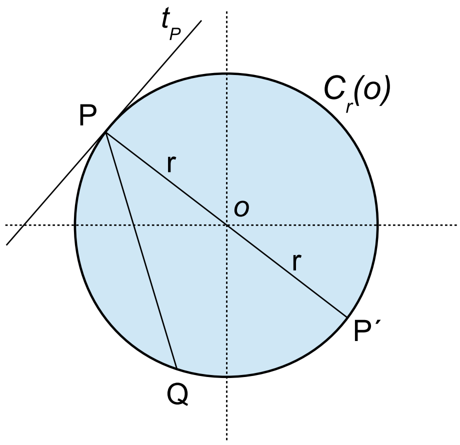
Se llama *cuerda* a cualquier segmento $\overline{PQ}$ con vértices en puntos distintos P y Q de la circunferencia.

Dado un punto P perteneciente a una circunferencia, Se llama *tangente por P* a la recta t que sólo interseca a la circunferencia en el punto P.

Dado un punto P perteneciente a una circunferencia de centro o y radio r, la recta que pasa por P y por o corta a la circunferencia en un punto P' que es el *simétrico de P con respecto a o*. El segmento $\overline{PP'}$ se llama *diámetro de* C que pasa por P. La medida de este segmento es $\left|\overline{PP'}\right| = 2r$ y es la distancia máxima a la que pueden encontrarse dos puntos de dicha circunferencia. Por cada punto $P \in C_r(o)$ hay un diámetro, lo que muestra que hay una cantidad infinita de diámetros para la misma.

Dado un punto P perteneciente a una circunferencia, llamamos *radio por P* al segmento $\overline{oP}$. Hay una relación muy importante entre la *tangente por P* t_P y el *radio por P* $\overline{oP}$, pues se verifica que $t_P \perp \overline{oP}$.

Todo lo anterior se puede resumir gráficamente:



9.1.7.2. Ángulos en una Circunferencia

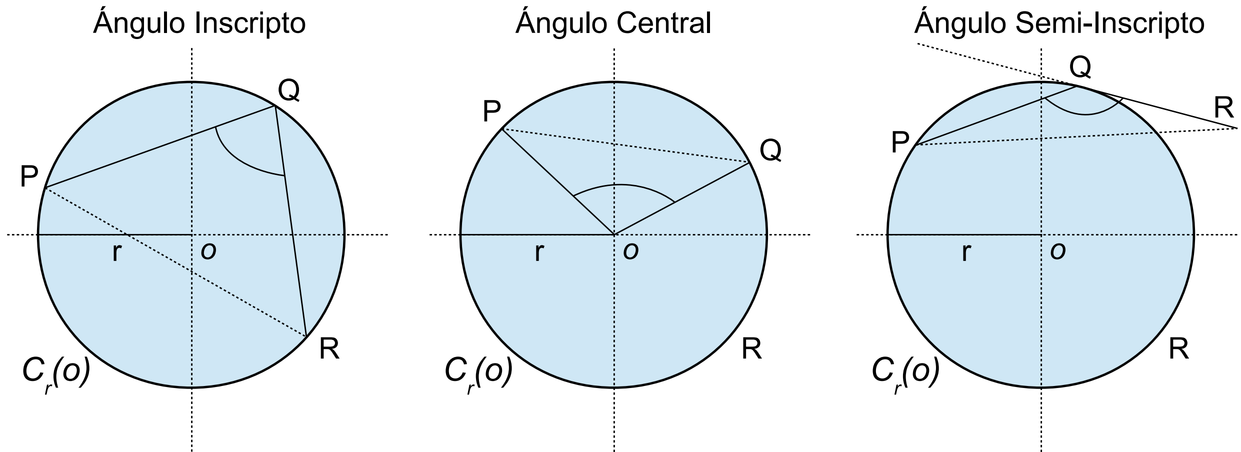
Hay tres formas importantes de construir ángulos basados en puntos de una circunferencia:

Ángulos Inscritos: Dados P, Q y R pertenecientes a $C_r(o)$, el ángulo $P\hat{Q}R$ se llama *inscrito* y la razón de llamarlo así radica en que tanto el vértice del ángulo como sus extremos son puntos de la circunferencia.

Ángulos Centrales: Dados dos puntos P y Q pertenecientes a $C_r(o)$, el ángulo $P\hat{o}Q$ se llama *central* porque su vértice es el centro de la circunferencia y sus extremos son puntos de la misma.

Ángulos Semi-Inscritos: Dados dos puntos P y Q pertenecientes a $C_r(o)$, y un punto R sobre la tangente a $C_r(o)$ que pasa por Q, se llama ángulo *semi-inscrito* con vértice Q y extremos en P y R al ángulo $P\hat{Q}R$. El punto R puede elegirse sobre cualquiera de las semirrectas en que Q divide a la tangente. De un lado el ángulo $P\hat{Q}R \geq 90°$ y del otro será $P\hat{Q}R \leq 90°$.

Gráficamente esto es:



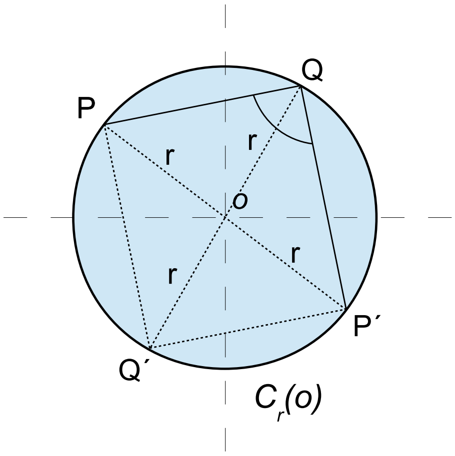
9.1.7.3. Propiedades de los Ángulos

Algunas propiedades de los ángulos construidos sobre circunferencias son de gran importancia en geometría, y en esta sección analizaremos algunas de ellas.

9.1.7.4. Ángulos inscritos con extremos en un diámetro

Una de las propiedades más importantes y útiles en relación a ángulos inscritos en circunferencias es la que se da cuando el ángulo $P\hat{Q}R$ se elige de tal forma que $\overline{PR}$ es un diámetro, es decir cuando $R = P'$ el punto simétrico de P con respecto al centro o.

Cuando en un ángulo $P\hat{Q}P'$ inscrito en una circunferencia de centro o y radio r los extremos son puntos P y P' simétricos con respecto al origen o, se cumple que dicho ángulo es *recto* con independencia de la elección del punto $Q \in C_r(o)$. Esta importante propiedad podemos demostrarla a partir del siguiente gráfico:



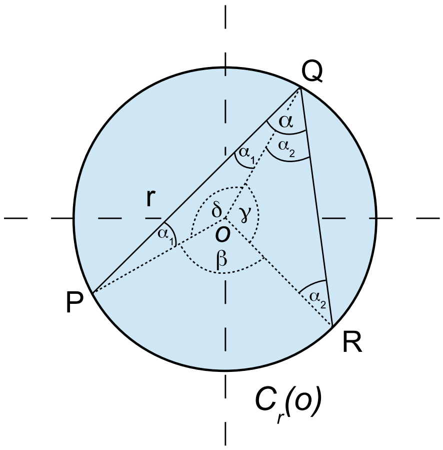
Consideremos P y Q puntos arbitrarios sobre $C_r(o)$ y ubiquemos sobre la misma los puntos simétricos con respecto al origen P' y Q'. El cuadrilátero $\overset{\square}{PQP'Q'}$ tiene como diagonales a $\overline{PP'}$ y $\overline{QQ'}$ que se cortan en el centro de la circunferencia, el cual equidista de los cuatro vértices. En el problema 9.1.6, pág. 147, vimos que esta condición implicaba que el cuadrilátero es un rectángulo. Pero entonces el ángulo $P\hat{Q}R = 90°$, tal como queríamos demostrar.

9.1.7.5. Ángulos inscritos vs. centrales

Cuando inscribimos un ángulo $P\hat{Q}R$ en una circunferencia es interesante pensar a la vez en el ángulo central $R\hat{o}P$. De hecho todo ángulo inscrito tiene asociado a éste otro ángulo central que guarda una relación importante con el primero:

$$R\hat{o}P = 2 \cdot P\hat{Q}R$$

Esta propiedad dice que el ángulo central asociado a un determinado ángulo inscrito, tiene una medida que es el doble de la del primero. Para demostrar esta importante propiedad podemos basarnos en el siguiente gráfico:



Si llamamos $\alpha = P\hat{Q}R$, $\alpha_1 = o\hat{Q}P$ y $\alpha_2 = o\hat{Q}R$ entonces es claro que $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Por otra parte hagamos $\gamma = R\hat{o}Q, \beta = R\hat{o}P$ y $\delta = P\hat{o}Q$. Es inmediato que:

$$\beta + \gamma + \delta = 360° \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\beta = 360 - \gamma - \delta}$$

Por otra parte, como los triángulos $\overset{\triangle}{PoQ}$ y $\overset{\triangle}{RoQ}$ son isóceles, entonces es inmediato que:

$$o\hat{P}Q = \alpha_1 \qquad\qquad o\hat{R}Q = \alpha_2$$

Además:

$$\gamma = 180 - 2\alpha_2 \qquad\qquad \delta = 180 - 2\alpha_1$$

Reemplazando estos datos en la expresión de β del recuadro de más arriba:

$$\begin{aligned}\beta &= 360 - \gamma - \delta \\ &= 360 - (180 - 2\alpha_2) - (180 - 2\alpha_1) \\ &= 2\alpha_2 + 2\alpha_1 \\ &= 2(\alpha_1 + \alpha_2) \\ &= 2\alpha\end{aligned}$$

De esta manera resulta $\beta = 2\alpha$ y queda demostrada la importante relación:

$$\boxed{R\hat{o}P = 2 \cdot P\hat{Q}R}$$

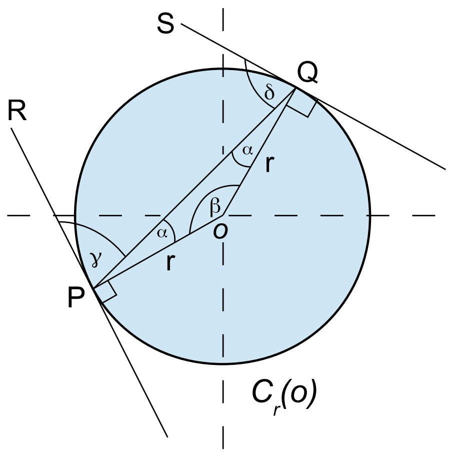
Observación 9.1.3. Observemos que si el ángulo $P\hat{Q}R$ estuviera inscrito sobre un diámetro, es decir si $R = P'$, entonces la relación de más arriba es coherente con el hecho de que $P\hat{Q}P' = 90°$ ya que en este caso $P'\hat{o}P = 180°$ y también se cumple la relación entre los dos.

9.1.7.6. Ángulos centrales vs. semi-inscritos

Si consideramos una circunferencia de centro o y radio r y puntos $P \neq Q$ sobre la misma, hay una relación muy importante entre el ángulo central $\beta = P\hat{o}Q$ determinado por la cuerda $\overline{PQ}$ y sus correspondientes semi-inscritos γ que pasa por P adyacente a $\overline{PQ}$ y δ que pasa por Q adyacente a $\overline{PQ}$, suponiendo que tanto γ como δ se han tomado del lado de la tangente que los hace menores o iguale a 90°. La relación es la siguiente:

$$\boxed{\gamma = \delta = \frac{1}{2}\beta}$$

Es decir el ángulo central de la cuerda $\overline{PQ}$ es el doble que sus respectivos semi-inscritos. Para demostrarlo consideremos el siguiente gráfico:



Llamemos $\beta = P\hat{o}Q$ al ángulo central determinado por la cuerda $\overline{PQ}$, γ al ángulo semi-inscrito de vértice P adyacente a la cuerda $\overline{PQ}$ y δ al ángulo semi-inscrito de vértice Q adyacente a la cuerda $\overline{PQ}$. Como el triángulo $\overset{\triangle}{PoQ}$ es isóceles entonces los ángulos $o\hat{P}Q$ y $o\hat{Q}P$ son congruentes, y si los nombramos α se cumple la siguiente relación:

$$\beta + 2\alpha = 180 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{180-\beta}{2} = 90 - \frac{1}{2}\beta}$$

Además los ángulos $o\hat{P}R$ y $o\hat{Q}S$ son rectos por ser sus lados radios y tangentes respectivamente. Esto quiere decir que:

$$\gamma = 90 - \alpha \qquad\qquad \delta = 90 - \alpha$$

Reemplazando el valor de α en las ecuaciones anteriores por su expresión en términos de β, resulta:

$$\gamma = 90 - \left(90 - \frac{1}{2}\beta\right) = \frac{1}{2}\beta \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\beta = 2\gamma}$$
$$\delta = 90 - \left(90 - \frac{1}{2}\beta\right) = \frac{1}{2}\beta \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\beta = 2\delta}$$

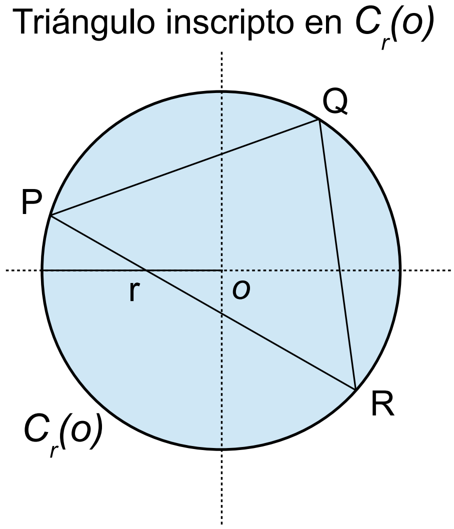
Vemos entonces que:

$$\boxed{\gamma = \delta = \frac{1}{2}\beta}$$

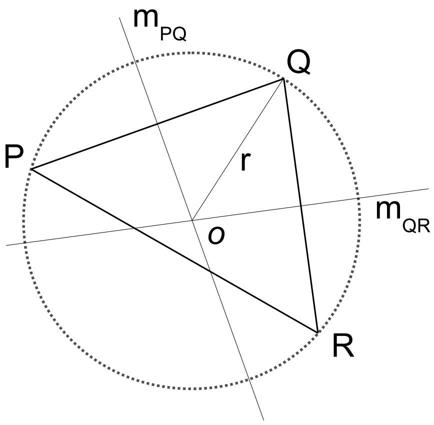
lo que termina la demostración.

9.1.7.7. Triángulos inscritos en circunferencias

Dada una circunferencia de centro o y radio r, si ubicamos en ella tres puntos distintos P, Q y R, entonces se dice que el triángulo $\overset{\triangle}{PQR}$ está inscrito en dicha circunferencia:



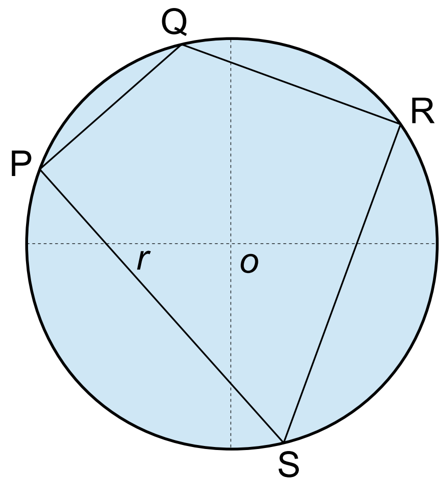
Es interesante analizar el problema recíproco. Dado un triángulo cualquiera $\overset{\triangle}{PQR}$ siempre existe un punto o y un radio $r > 0 \in \mathbb{R}$ de forma tal que la circunferencia $C_r(o)$ pase por los tres puntos del triángulo. Para demostrarlo consideremos el siguiente gráfico:



Tracemos las mediatrices m_{PQ} y m_{QR} de los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$ respectivamente y llamemos o al punto de intersección entre m_{PQ} y m_{QR}. Por un lado todos los puntos de m_{PQ} equidistan de P y de Q y por otro lado los puntos de m_{QR} equidistan de Q y de R. Como o pertenece simultáneamente a ambas mediatrices, entonces o equidista de los tres puntos a la vez. Y la distancia a la que está o de dichos puntos es $r = d(Q, o)$. Por lo tanto si tomamos como centro al punto o y como radio a r, la circunferencia $C_r(o)$ contendrá a los tres puntos del triángulo y por lo tanto $P\overset{\triangle}{Q}R$ estará inscrito en dicha circunferencia.

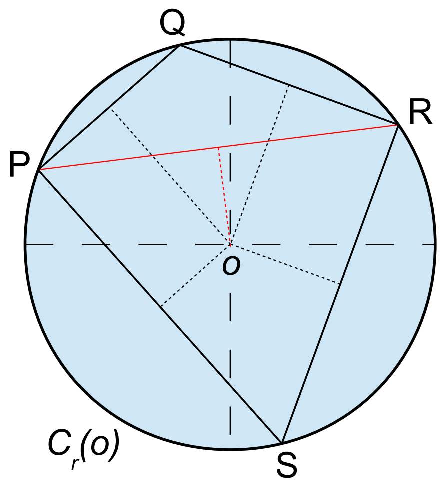
9.1.7.8. Cuadriláteros inscritos en circunferencias

Un cuadrilátero $P\overset{\square}{Q}RS$ se dice *inscrito* en una circunferencia si existe una circunferencia de centro o y radio $r > 0 \in \mathbb{R}$ que contiene a los cuatro puntos del mismo:



A diferencia de los triángulos que siempre pueden inscribirse en alguna circunferencia, no es cierto que todo cuadrilátero pueda inscribirse en una circunferencia. A continuación demostraremos que una condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero pueda inscribirse en una circunferencia es que las mediatrices de todos sus lados converjan en un punto “o”, que será el centro de la misma. Si las mediatrices no convergieran en un mismo punto, entonces el cuadrilátero no podrá inscribirse en una circunferencia.

Para demostrar la afirmación anterior consideremos el siguiente gráfico:



Los segmentos punteados en negro están incluidos en las mediatrices de los lados del cuadrilátero. El segmento punteado en rojo está incluido en la mediatriz del segmento $\overline{PR}$.

- Supongamos primero que el cuadrilátero está inscrito en la circunferencia $C_r(o)$:

  Entonces todos los puntos equidistan del centro o, lo que implica que o pertenece a la vez a todas las mediatrices, cosa que implica inmediatamente que las mediatrices convergen a dicho punto.

  Esto demuestra que la condición es necesaria.

- Supongamos ahora que las mediatrices convergen todas al punto o:

  Hagamos $r = d(P, o)$.

  Consideremos primero el triángulo $P\overset{\triangle}{Q}R$. Como todas las mediatrices del mismo se cortan en o, eso quiere decir que está inscrito en la circunferencia $C_r(o)$.

  Consideremos ahora al triángulo $P\overset{\triangle}{R}S$. Como todas las mediatrices del mismo se cortan en o, eso quiere decir que está inscrito también en la circunferencia $C_r(o)$.

  Pero entonces los cuatro vértices pertenecen a $C_r(o)$, lo que indica que el cuadrilátero $P\overset{\square}{Q}RS$ necesariamente está inscrito en dicha circunferencia.

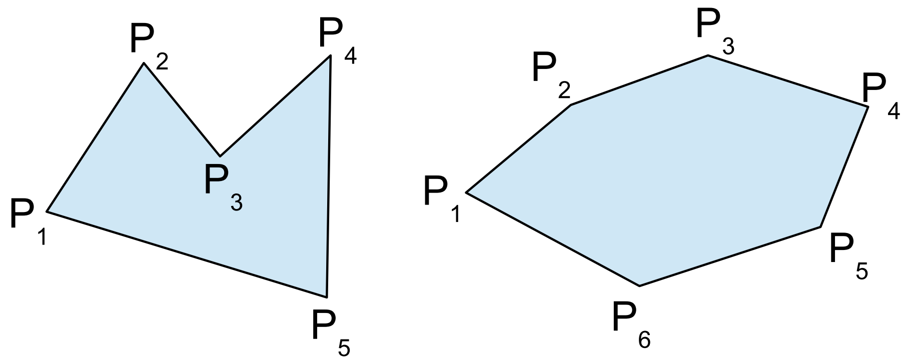
  Esto demuestra que la condición es suficiente.

Hemos demostrado por lo tanto que la condición es necesaria y suficiente.

9.1.8. Polígonos

Dados $n \in \mathbb{N}$ puntos distintos no alineados de a tres $P_1, P_2, \cdots, P_n$ llamados *vértices* y n segmentos construidos a partir de esos puntos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \cdots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$ llamados *lados*, si dichos segmentos no se intersecan entre sí salvo en los vértices entonces la figura geométrica que consta de esos n vértices y n lados se llama *polígono de n lados*.

En la figura se muestra un polígono de 5 lados y otro de 6 lados:



9.1.8.1. Polígonos Convexos y Cóncavos

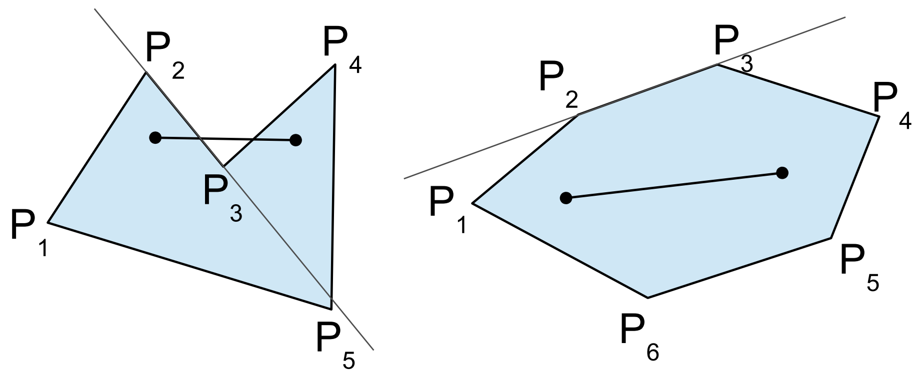
Un polígono se dirá *convexo* cuando todos sus ángulos interiores sean menores que 180°, y se dirá *cóncavo* si alguno de los ángulos interiores es superior a 180°. Un ejemplo de polígono convexo es el del lado derecho de la figura anterior, mientras que el del lado izquierdo es un polígono cóncavo pues el ángulo $\hat{P}_3$ es mayor que 180°.

En los polígonos convexos cualquier recta que pase por uno de sus lados deja al polígono completamente incluido en uno de los semiplanos que dicha recta determina, mientras que en un polígono cóncavo esto no tiene por qué ser así.

En los polígonos convexos cualquier par de puntos interiores al polígono determina un segmento completamente incluido en el interior del polígono, mientras que en un polígono cóncavo esto no tiene por qué ser así.

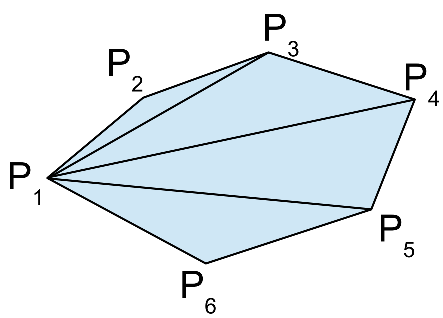
En los polígonos convexos los vértices apuntan hacia el *exterior* del polígono, mientras que en los cóncavos esto no tiene por que ser así.

En la figura a continuación se muestran ejemplos de lo dicho anteriormente:



9.1.8.2. Ángulos interiores en un polígono convexo

En un polígono *convexo* si fijamos uno de los vértices, digamos P_1, y desde él trazamos los segmentos que unen este vértice con el resto de los vértices — *salvo* P_2 — obtenemos una división del polígono en una cantidad de $n - 2$ triángulos:



El ejemplo de la figura muestra la subdivisión para el caso $n = 6$, donde vemos que hay determinados $4 = n-2$ triángulos cuya reunión forman la figura completa. Si sumamos los ángulos interiores de estos triángulos, obtendremos como resultado la suma de los ángulos interiores del polígono. Como en cada triángulo la suma de los ángulos interiores es de 180° y hay $n - 2$ triángulos, entonces se deduce la siguiente fórmula:

$$\boxed{\hat{P}_1 + \cdots + \hat{P}_n = 180^\circ \cdot (n - 2)}$$

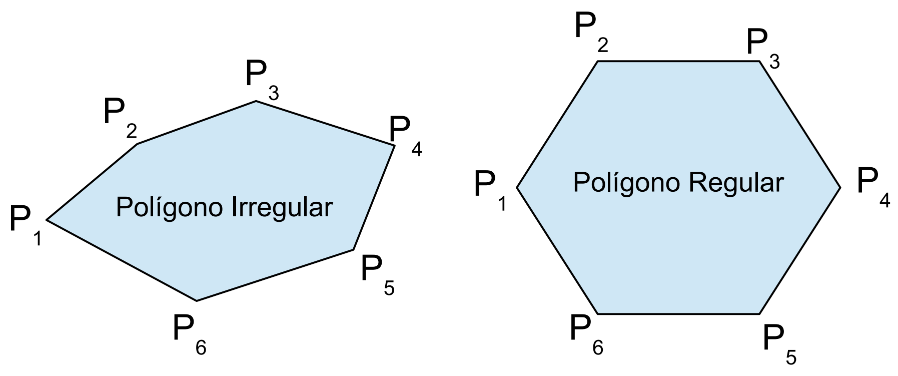
En el caso de un triángulo da 180° y en el caso de un cuadrilátero da 360° que es lo esperado.

Observemos además que como todos los ángulos son iguales, para un $1 \leq i \leq n$ cualquiera se tiene:

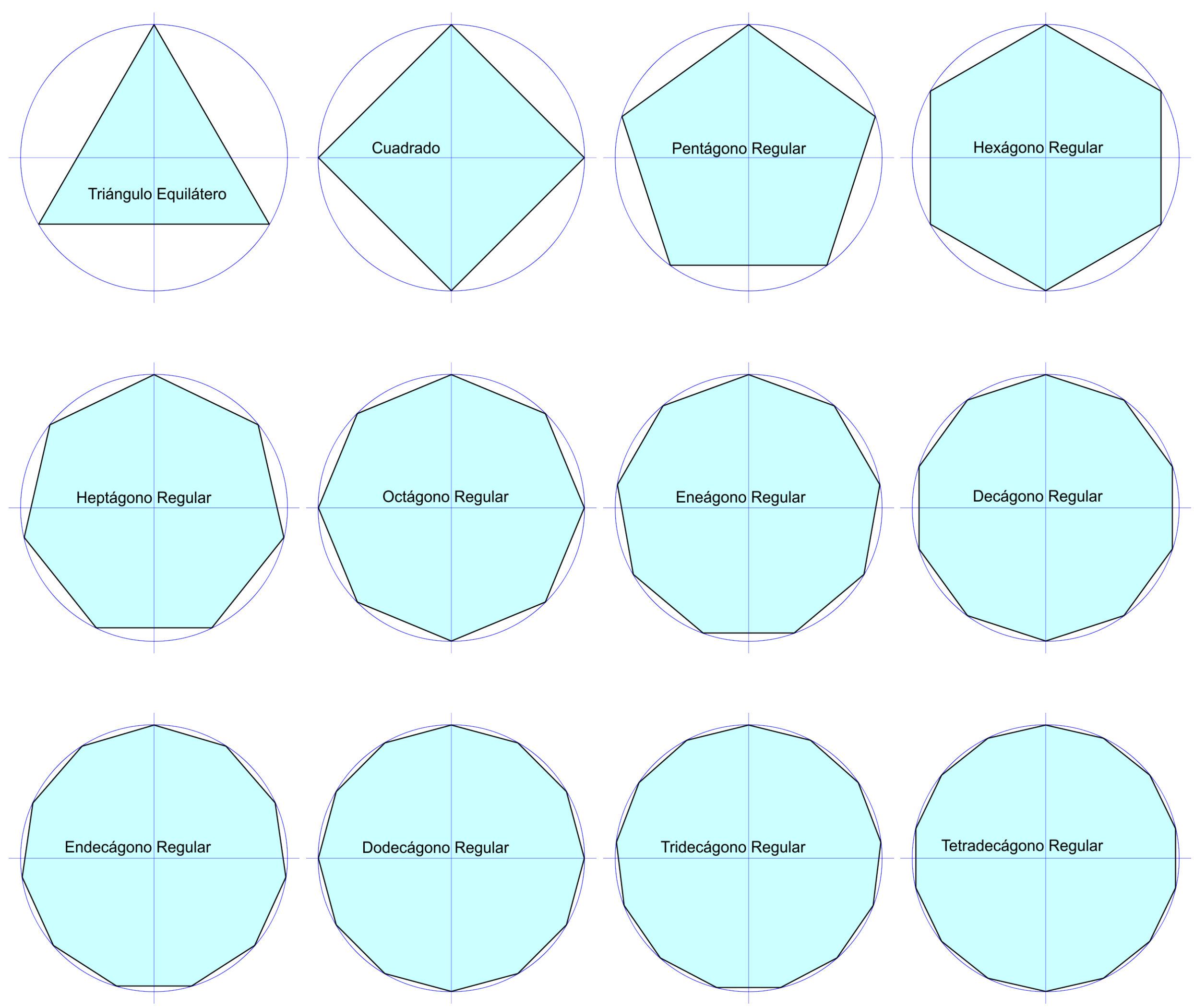
$$n\hat{P}_i = 180° (n-1) \Rightarrow \boxed{\hat{P}_i = \frac{180° (n-2)}{n}}$$

9.1.8.3. Polígonos regulares e irregulares

Un polígono se dirá *regular* si todos sus ángulos y lados son congruentes, y se dirá *irregular* si no todos sus ángulos o lados son congruentes. Un ejemplo de un polígono irregular de 6 lados y otro regular de 6 lados puede verse en la siguiente figura:



Los polígonos regulares tienen nombres que se construyen según la cantidad de lados que tengan. En la figura a continuación pueden verse los polígonos regulares más importantes, junto con sus nombres:

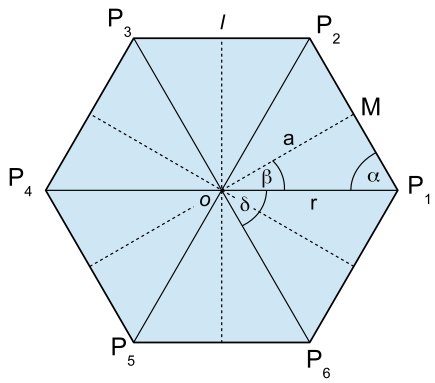


Como vemos todos los polígonos regulares pueden inscribirse en una circunferencia, cosa que no es casualidad y es consecuencia de que las mediatrices de todos los segmentos que forman sus lados converjan en un punto común “o” el cual será el centro de la circunferencia. En la sección que sigue analizaremos esto más a fondo.

Otra cosa que puede observarse en las figuras es que a medida que aumenta la cantidad de lados, el polígono se asemeja cada vez más a una circunferencia. Más adelante también exploraremos esta cuestión.

9.1.8.4. Elementos de los polígonos regulares

Consideremos el siguiente gráfico que representa un polígono regular de $n = 6$ lados:



La intersección de un par de diagonales mayores del polígono determina el centro de la circunferencia donde se encuentra inscrito, ya que todas ellas se intersecan en el centro o. Lo mismo ocurre con las mediatrices de los lados.

Observemos que para todo $1 \leq i \leq n$ los triángulos[3] $P_i\overset{\triangle}{o}P_{i+1}$ son congruentes entre sí. Además todos son isóceles con dos de sus lados midiendo r y el tercero l. Como el polígono se compone de n de estos triángulos y el ángulo δ es el mismo en todos, esto implica que:

$$\delta = \frac{360°}{n} \qquad\qquad \beta = \frac{1}{2}\delta = \frac{180°}{n}$$

En cuanto al ángulo α en la sección anterior habíamos visto que:

$$\alpha = \frac{180°\,(n-2)}{n}$$

En el gráfico la letra a simboliza al *apotema* del polígono que se define como el segmento que une el centro o con el punto medio del lado correspondiente. Además representa la altura de cualquiera de los triángulos isóceles $P_i\overset{\triangle}{o}P_{i+1}$ con respecto al lado $\overline{P_iP_{i+1}}$.

Hay una relación entre el apotema a, el radio r de la circunferencia y el lado l del polígono que se deduce a partir del Teorema de Pitágoras aplicado al triángulo $M\overset{\triangle}{o}P_1$, que es rectángulo en M, de catetos a y $\frac{l}{2}$ y de hipotenusa r:

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2 = r^2$$

Despejando cada una de las letras en la fórmula anterior obtenemos:

$$a = \sqrt{r^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \qquad r = \sqrt{a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \qquad l = 2\cdot\sqrt{r^2 - a^2}$$

[3]En el caso $i = n$, $i + 1 = n + 1$ se va del rango, pero no hay problema si adoptamos la convención de que cada vez que aparezca $n + 1$ en el subíndice de algún punto lo reemplazamos por 1, ya que en el fondo el punto que sigue al último vuelve a ser P_1.

Por otra parte utilizando las razones trigonométricas con el ángulo β, que es adyacente al apotema $\overline{oM} = a$, opuesto al cateto $\overline{MP_1} = \frac{l}{2}$ y de hipotenusa $\overline{oP_1} = r$ se tiene que:

$$\cos(\beta) = \frac{a}{r} \qquad \sin(\beta) = \frac{\frac{l}{2}}{r} = \frac{l}{2r} \qquad \tan(\beta) = \frac{\frac{l}{2}}{a} = \frac{l}{2a}$$

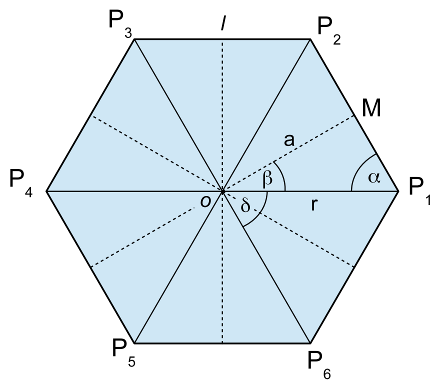
y como β depende únicamente de la cantidad de lados n del polígono, entonces nos damos cuenta que todas las medidas y ángulos importantes del polígono regular dependen exclusivamente de su cantidad de lados y de la longitud l de cada lado, de la siguiente forma:

$$\beta = \frac{180°}{n} \qquad \delta = 2\beta \qquad \alpha = \frac{180°(n-2)}{n}$$

$$r = \frac{l}{2\sin(\beta)} \qquad a = r \cdot \cos(\beta)$$

9.1.8.5. Perímetro y Área de un Polígono Regular

Como referencia para los razonamientos que vamos a hacer, volvamos a ver el gráfico de un polígono regular de $n = 6$ lados:



Llamemos $\mathcal{A}_n$ al área de un polígono regular de n lados y $\mathcal{P}_n$ a su perímetro, suponiendo que la medida de cada uno de sus lados es $l > 0 \in \mathbb{R}$.

La expresión para el perímetro es muy sencilla si tenemos presente que el polígono tiene n lados de medida l cada uno y el perímetro se calcula sumando las medidas de todos los lados:

$$\boxed{\mathcal{P}_n = n \cdot l} \leftarrow \text{Fórmula del Perímetro}$$

Para determinar el área, observemos que la figura se compone de n triángulos isóceles congruentes a $P_1\overset{\triangle}{o}P_2$, cuya base es "$l$" el lado del polígono y de altura "a" dada por el apotema. Como:

$$\text{Área}\left(P_1\overset{\triangle}{o}P_2\right) = \frac{l \cdot a}{2}$$

entonces el área del polígono total será n veces el área de dicho triángulo:

$$\mathcal{A}_n = n \cdot \frac{l \cdot a}{2} = \frac{n \cdot l \cdot a}{2}$$

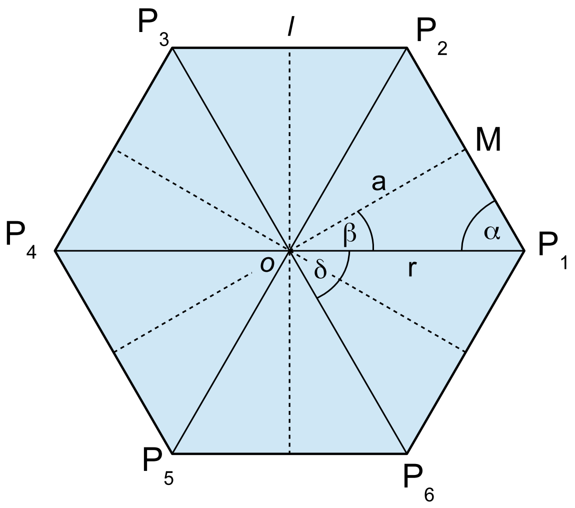
Como $n \cdot l$ coincide con el perímetro $\mathcal{P}_n$, entonces se deduce que:

$$\boxed{\mathcal{A}_n = \frac{\mathcal{P}_n \cdot a}{2}} \leftarrow \text{Fórmula del Área}$$

9.1.8.6. Resumen de Fórmulas

En las secciones anteriores vimos una serie de fórmulas que relacionan las medidas y ángulos más importantes de un polígono regular de n lados, así como también hallamos expresiones para su perímetro $\mathcal{P}_n$ y área $\mathcal{A}_n$.

A continuación presentamos un resumen de dichas fórmulas:



$$r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2 \qquad \mathcal{P}_n = n \cdot l \qquad \mathcal{A}_n = \frac{\mathcal{P}_n \cdot a}{2}$$

$$\beta = \frac{180°}{n} \qquad \delta = 2\beta \qquad \alpha = \frac{180°\,(n-2)}{n}$$

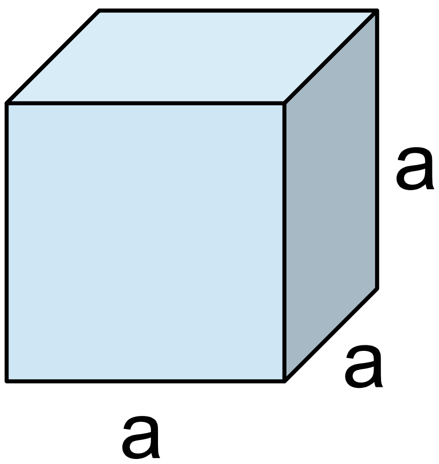
$$a = r\cos(\beta) \qquad l = 2r\operatorname{sen}(\beta) \qquad l = 2a\tan(\beta)$$

9.1.9. Nociones de Geometría Tridimensional

Hasta ahora hemos analizado figuras planas, pero la geometría también se ocupa de figuras tridimensionales. A continuación nos ocuparemos de algunas de ellas — *las más elementales* — para llegar a expresiones que nos permitan calcular su *superficie* o *área* y su *volumen*.

9.1.9.1. Cubos o Hexaedros Regulares

Un *cubo* o *hexaedro regular* es una figura con seis caras cuadradas congruentes de lado a cada uno, que se cortan entre sí en ángulos rectos:



Los cubos tienen seis caras, ocho vértices y doce lados. La superficie de un cubo se define como el área total que suman todas sus caras, y puede ser calculada según:

$$A = 6 \cdot a^2$$

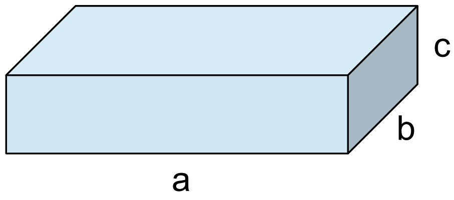
pues cada una de sus caras cuadradas tiene una superficie de a^2.

El volumen que ocupa un cubo se calcula según:

$$V = base \times ancho \times alto = a \cdot a \cdot a = a^3$$

9.1.9.2. Paralelepípedos Rectos

Un *paralelepípedo recto* es una generalización del cubo, donde las figuras de las caras son rectángulos en lugar de cuadrados y por lo tanto ahora los lados no tienen por qué ser todos iguales:



Los paralelepípedos también tienen seis caras, ocho vértices y doce lados, pero para calcular su superficie y volumen hay que tener en cuenta que los lados no son iguales. Hay dos caras rectangulares de base a y ancho c, dos caras de base b y ancho c y dos caras de base a y ancho b. Por lo tanto la superficie o área total se calcula según:

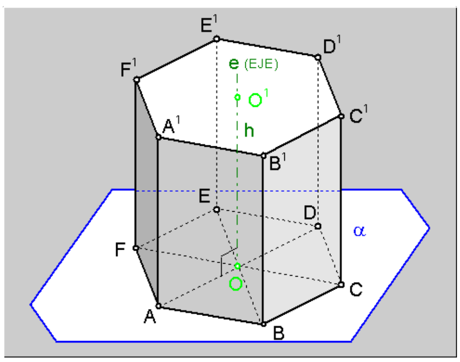
$$A = 2ab + 2bc + 2ac$$

Para el volumen simplemente multiplicamos la superficie del rectántulo que representa la base, es decir el que tiene base a y ancho b, por la altura c:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

9.1.9.3. Prismas Rectos

Si en un plano α ubicamos un polígono regular cualquiera de n lados, luego elegimos una altura h, y sobre cada uno de los vértices en forma perpendicular al plano α construimos segmentos de longitud h, entonces quedan determinados nuevos vértices que si los unimos determinan un polígono regular congruente con el primero. La figura que queda determinada mediante esta construcción tendrá $2n$ vértices, $3n$ lados y $n+2$ caras y se llama *prisma regular recto*. Podemos ilustrar dicha construcción mediante el siguiente gráfico, donde como ejemplo se eligió un *prisma hexagonal recto*:



9.2. Ejercicios

1. A partir de los datos brindados, determinar en cada uno de los casos el ángulo β.

   a) La medida de β es el doble de la de su complemento.

   b) La medida de β es la tercera parte de la medida de su suplemento.

   c) La medida de β difiere de la de su suplemento en 15°.

   d) La medida del suplemento de β es igual al doble de la medida de: β incrementada en 10°.

   e) La medida del suplemento de β es igual al doble de la medida de β, incrementada en 10°.

f) La suma de las medidas de su complemento y de su suplemento es 150°.

g) La medida del complemento de β supera en 5° a los dos quintos de la medida de su suplemento.

2. Analizar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas, justificando y explicitando en todos los casos el razonamiento hecho para determinarlo.

   a) Si dos ángulos son suplementarios, entonces son adyacentes.

   b) Si dos ángulos son adyacentes, entonces son suplementarios.

   c) Algunos pares de ángulos suplementarios son adyacentes.

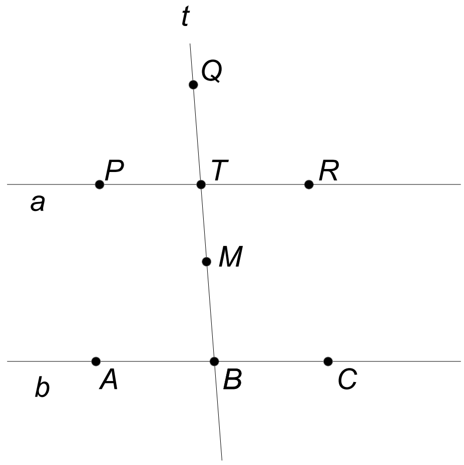
   d) Si las medidas de los suplementos de dos ángulos son iguales, entonces las medidas de dichos ángulos también lo son.

   e) Existen pares de ángulos opuestos por el vértice que son suplementarios.

   f) Si dos ángulos son opuestos por el vértice, entonces tienen medidas iguales.

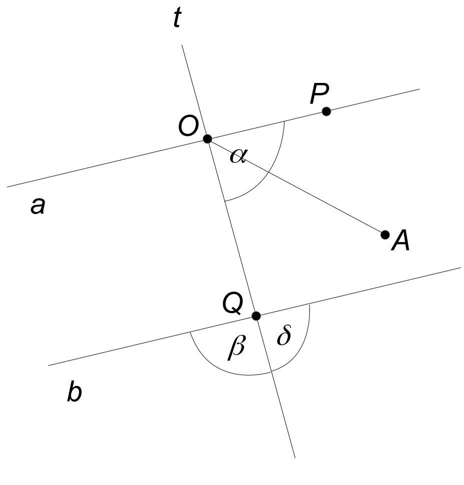
   g) Si dos ángulos tienen medidas iguales, entonces son opuestos por el vértice.

3. Considere el gráfico de la figura a continuación:



   Se sabe que $\left|P\overset{\angle}{T}Q\right| = \frac{1}{3}\left(\left|M\overset{\angle}{B}C\right| - 20°\right)$. Calcular $\left|Q\overset{\angle}{T}R\right|$ y $\left|A\overset{\angle}{B}M\right|$.

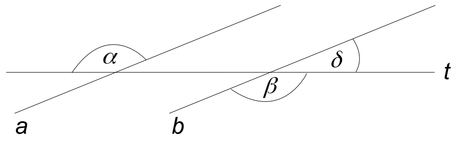
4. Considere el gráfico de la figura a continuación:



   Se sabe que $\overrightarrow{OA}$ es bisectriz de $P\overset{\angle}{O}Q$; que $a \parallel b$; y que $\left|P\overset{\angle}{O}A\right| = \frac{1}{2}\beta - 20°$.

   Calcular δ y α.

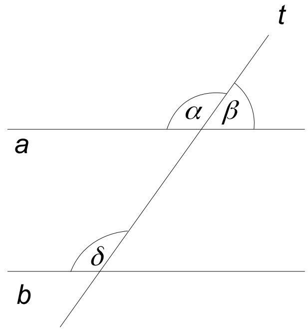
5. Considere el gráfico de la figura a continuación:



Se sabe que $\alpha = 5x - 12°$ y que $\beta = 3x + 10°$.

Determinar δ.

6. Considere el gráfico de la figura a continuación:



Se sabe que $\alpha = 2\beta + y$ y que $\alpha = y + 20°$.

Determinar δ.

7. Analizar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas, justificando y explicitando en todos los casos el razonamiento hecho para determinarlo.

   a) Existen ángulos alternos internos entre paralelas que son suplementarios.

   b) Los ángulos alternos externos siempre son congruentes.

   c) Algunos pares de ángulos conjugados externos entre paralelas son congruentes.

   d) Los ángulos conjugados externos son siempre suplementarios.

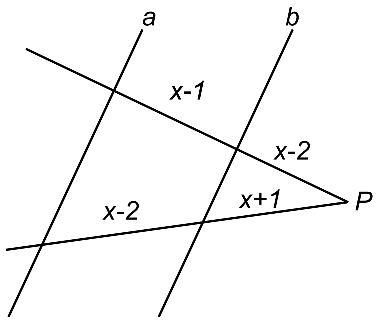
   e) Los ángulos conjugados externos entre paralelas son suplementarios.

   f) Si dos rectas son cortadas por una tercera formando ángulos alternos internos congruentes, entonces son paralelas.

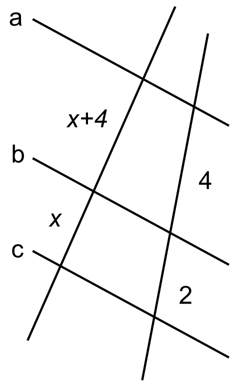
   g) Si dos rectas son cortadas por una tercera formando ángulos conjugados externos suplementarios, entonces son paralelas.

8. Si las semirrectas $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AQ}$ son bisectrices de dos ángulos alternos externos entre paralelas a y b, cortadas por una transversal t: ¿Cómo resultan las rectas AP y BQ? ¿Por qué?

9. Considere la figura a continuación. Hallar el valor de x, sabiendo que $a \parallel b$ y que P es el punto de intersección entre las dos transversales. Justificar.



10. Considere la siguiente figura, donde se sabe que $b \parallel c$:



a) Si $x = 2$: ¿Es posible que la recta a sea paralela a las rectas b y c?. Justifique.

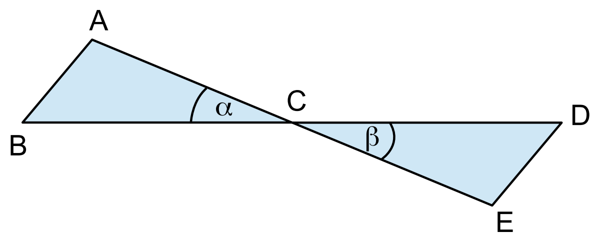
b) ¿Cuál es el valor de x que asegura que $a \parallel b \parallel c$?

11. Dibujar un segmento cualquiera y dividirlo en 5 partes iguales, justificando la construcción hecha a partir de algún teorema apropiado.

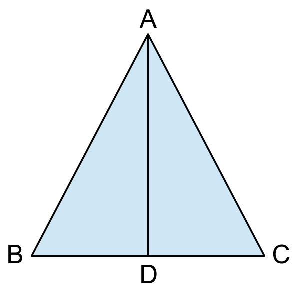
12. Dado un segmento cualquiera, dividirlo en tres partes tales que la razón entre la primera y la segunda sea $\frac{1}{3}$ y entre la segunda y la tercera sea $\frac{4}{5}$. Justificar los pasos de la construcción.

13. En los siguientes casos, analice la situación y determine cuál de los criterios de congruencia podría utilizarse para probar que los triángulos son congruentes.

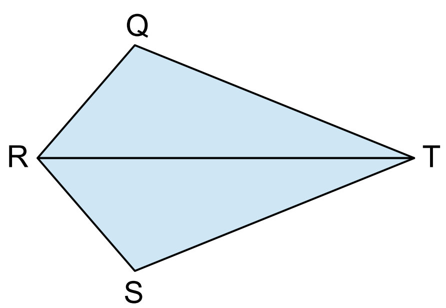
a) Se sabe que el punto C divide a los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ en dos partes iguales. Demostrar que $A\overset{\triangle}{B}C \cong E\overset{\triangle}{D}C$.



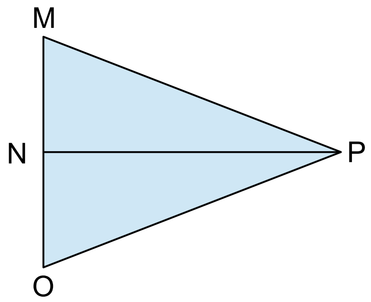
b) Se sabe que $\overline{AD}$ parte por la mitad al segmento $\overline{BC}$ y que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Demostrar que $A\overset{\triangle}{B}D \cong A\overset{\triangle}{C}D$.



c) El segmento $\overline{RT}$ es bisectriz de los ángulos $Q\overset{\angle}{R}S$ y $Q\overset{\angle}{T}S$. Demostrar que $R\overset{\triangle}{T}Q \cong R\overset{\triangle}{T}S$.



d) $\overline{NP} \perp \overline{MO}$ y $\overline{NP}$ es bisectriz del ángulo $\overset{\angle}{MPO}$. Demostrar que $\overset{\triangle}{MNP} \cong \overset{\triangle}{ONP}$.



14. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada uno de los casos:

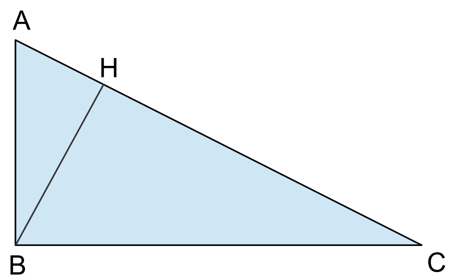
    a) Si dos triángulos son congruentes: ¿Son también semejantes?

    b) Si dos triángulos son semejantes: ¿Son también congruentes?

    c) ¿Es verdad que dos triángulos equiláteros cualesquiera son semejantes? ¿Por qué?. Justificar.

    d) ¿Es verdad que dos triángulos equiláteros cualesquiera son congruentes? ¿Por qué?. Justificar.

15. Considere el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ de la, donde $\overline{BH}$ es la altura correspondiente al lado $\overline{AC}$:



    a) Demostrar que $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AHB}$, indicando el criterio utilizado.

    b) Demostrar que $\overset{\triangle}{CHB} \sim \overset{\triangle}{AHB}$, indicando el criterio utilizado.

    c) Demostrar que $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{CHB}$, indicando el criterio utilizado.

    d) Suponiendo que $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{AB}$, calcular en cada uno de los incisos anteriores la razón de semejanza.

9.3. Problemas

1. Demostrar que:

    a) Si dos triángulos son semejantes entonces la razón de sus perímetros es igual a la razón entre cualquier par de lados homólogos.

    b) Si dos triángulos son semejantes entonces la razón entre sus alturas homólogas es igual a la razón entre un par de lados homólogos cualesquiera.

    c) Si dos triángulos son semejantes entonces la razón de sus áreas es igual al cuadrado de la razón entre un par de lados homólogos cualesquiera.

2. En un triángulo de base $\overline{BC} = 4cm$ y altura $\overline{AH} = 6cm$ se traza un segmento paralelo a la base, que corta a la altura en un punto H' tal que $\overline{AH'} = \frac{1}{3}\overline{AH}$. Determinar las áreas de las dos partes en que queda dividido el triángulo.

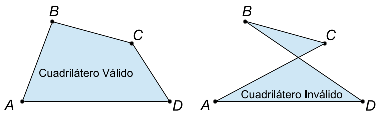
3. ¿Cuál es la razón entre las áreas de dos triángulos equiláteros cuyos lados miden respectivamente 15 y 5 cm?

4. En la sección 9.1.6.4, pág. 140, estudiamos cómo llegar a expresiones para el área de algunos cuadriláteros. ¿Se anima a razonar de manera similar para resolver los siguientes ítems?

   a) Hallar una expresión para el área de un rombo.

   b) Hallar una expresión para el área de un romboide.

5. Considere un cuadrilátero $\overset{\square}{ABCD}$ como el de la siguiente figura:



   Demostrar que si los lados opuestos son congruentes y los ángulos opuestos son congruentes y las diagonales se cortan en un punto o que las divide mutuamente en partes iguales, entonces el cuadrilátero $\overset{\square}{ABCD}$ debe ser un paralelogramo.

6. Demostrar que si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos paralelos y congruentes, entonces es un paralelogramo.

7. Probar que:

   a) Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, entonces es un rectángulo.

   b) Las diagonales de un rectángulo son congruentes.

   c) Si un paralelogramo tiene sus diagonales congruentes entonces es un rectángulo.

8. Demostrar que:

   a) Si un paralelogramo tiene dos lados consecutivos congruentes, entonces es un rombo.

   b) Si las diagonales de un paralelogramo se cortan perpendicularmente, entonces es un rombo.

   c) Las diagonales de un rombo son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.

   d) Si las diagonales de un paralelogramo son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen, entonces es un rombo.

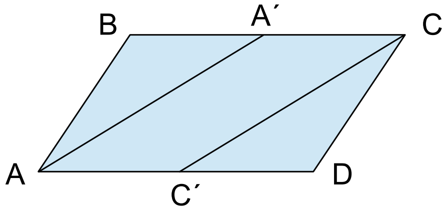
9. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, demostrándola en caso de ser verdadera o exhibiendo algún contraejemplo en caso de ser falsa.

   a) Si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes, entonces es un rectángulo.

   b) Si las diagonales de un rombo son congruentes, entonces es un cuadrado.

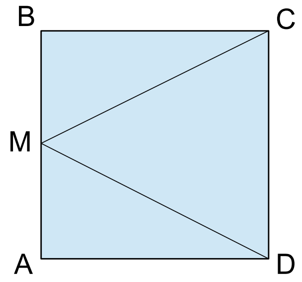
   c) Si en un cuadrilátero cada diagonal está incluida en la mediatriz de la otra, entonces es un rombo.

10. Considere el siguiente gráfico:



   donde $\overset{\square}{ABCD}$ es un paralelogramo y $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$ son las bisectrices de $\hat{A}$ y $\hat{C}$ respectivamente. Demostrar que $\overset{\square}{AA'CC'}$ es un paralelogramos.

11. En el cuadrado $\overset{\square}{ABCD}$, M es el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Probar que $\overset{\triangle}{MCD}$ es isóceles.



12. Sea M el punto medio del segmento $\overline{AB}$ del paralelogramo $\overset{\square}{ABCD}$ y N el punto medio del segmento $\overline{CD}$. ¿Recuerda qué es el segmento $\overline{MN}$ del paralelogramo original? Demuestre que $\overset{\square}{MNCB}$ es un paralelogramo.

13. Demostrar que si $\overline{MN}$ es la base media correspondiente a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, entonces $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$. ¿Cuál es la razón entre $\overline{MN}$ y $\overline{AC}$? Justifique.

14. Se traza un segmento $\overline{AB}$ y se construye la mediatriz m de dicho segmento. Luego se considera un punto $P \in m$ cualquiera y se lo une con A y con B. A continuación por B se traza la recta r paralela al segmento $\overline{PA}$ y por A se traza la recta t paralela al segmento $\overline{PB}$. Las rectas t y r se cortan en un punto al que llamaremos Q.

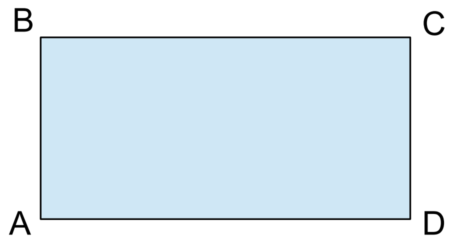
    a) ¿Es posible asegurar que $\overset{\square}{PAQB}$ es un paralelogramo? ¿Por qué? Justifique.

    b) ¿Puede asegurar que el cuadrilátero $\overset{\square}{PAQB}$ es un rectángulo? ¿Por qué? Justifique.

    c) ¿Se puede asegurar que el cuadrilátero $\overset{\square}{PAQB}$ es un rombo? ¿Por qué?. Justifique.

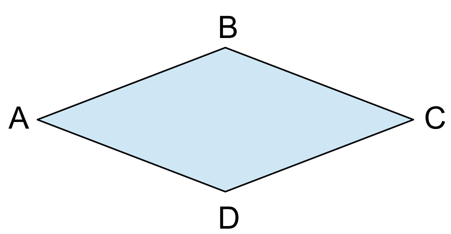
15. Mediante los puntos medios de los lados de un cuadriláteros es posible construir un nuevo cuadrilátero. El objetivo de este problema es analizar las diferentes posibilidades para realizar dicha construcción, empezando por el caso más simple y hasta llegar al más general:

    a) Considere un rectángulo como el de la siguiente figura:

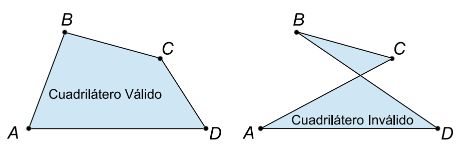
    Demostrar que el cuadrilátero determinado por los puntos medios de los lados es un rombo.

    b) Considere un rombo como el de la siguiente figura:

    Demuestre que el cuadrilátero determinado por los puntos medios de los lados es un rectángulo.

    c) Considere ahora un cuadrilátero arbitrario como el de la siguiente figura:

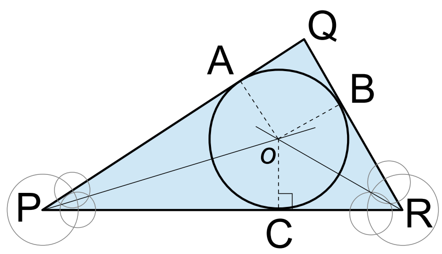
¿Qué tipo de cuadrilátero se forma uniendo los puntos medios de los lados del mismo?

16. Demostrar que si $\overset{\square}{ABCD}$ es un trapecio isóceles con $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, entonces el ángulo $\hat{B}$ es congruente al ángulo $\hat{C}$ y el ángulo $\hat{A}$ es congruente al ángulo $\hat{D}$.

17. Demostrar que en un romboide las diagonales se cortan perpendicularmente y que la diagonal principal está incluida en la bisectriz de los ángulos cuyos vértices une.

18. Se reduce en un 10 % la longitud de un par de lados opuestos de un cuadrado y se incrementa en un 10 % la del otro par, para obtener un rectángulo. ¿Qué variación experimenta el área del cuadrado cuando se convierte de esta manera en rectángulo? ¿La variación es positiva o negativa? *(Recuerde que la variación del área es la diferencia entre el área de la figura final con respecto a la inicial).*

19. *(Opcional)* - En el problema 9.1.7.7, pág. 154, analizamos cómo construir una circunferencia que inscriba a un triángulo $\overset{\triangle}{PQR}$. En este problema analizaremos el problema inverso, el de inscribir una circunferencia en un triángulo $\overset{\triangle}{PQR}$. Una circunferencia se dice *inscrita* en el triángulo $\overset{\triangle}{PQR}$ si los lados de dichos triángulos son tangentes a la misma:



Demostrar que si o se elige como la intersección de las bisectrices de los ángulos $\hat{P}$ y $\hat{R}$ y como radio r se elige la altura del triángulo $\overset{\triangle}{PoR}$ con respecto al lado $\overline{PR}$, entonces la circunferencia de centro o y radio r es la inscrita en el triángulo $\overset{\triangle}{PQR}$. Además deducir que los puntos $A \in \overline{PQ}$, $B \in \overline{QR}$ y $C \in \overline{PR}$ de contacto de la circunferencia con el triángulo original son aquellos donde $\overline{oA} \perp \overline{PQ}$, $\overline{oB} \perp \overline{QR}$ y $\overline{oC} \perp \overline{PR}$. El punto o se llama *incentro* del triángulo $\overset{\triangle}{PQR}$.

20. Considere el siguiente cuadrilátero:

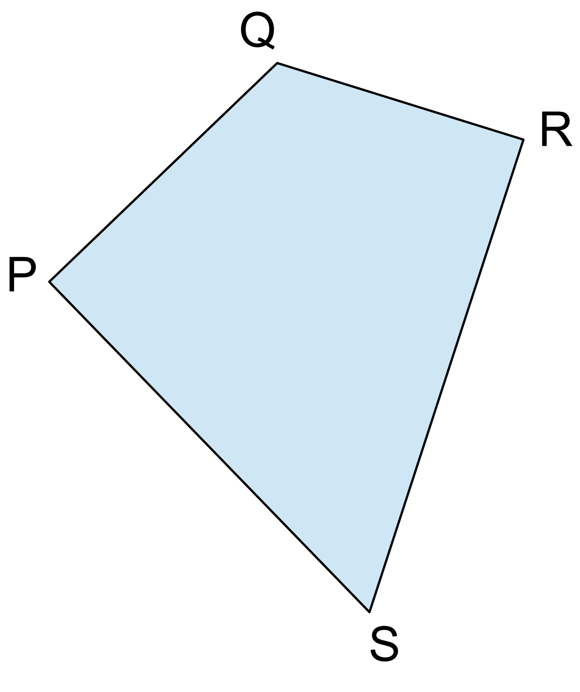
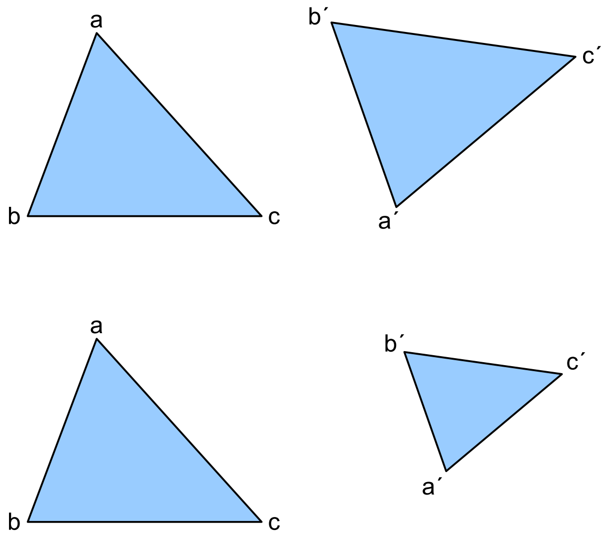


Figura 9.4.1: Semejanza y congruencia de triángulos



La siguiente figura nos ayudará a ilustrar la noción de semejanza y congruencia de triángulos. Los triángulos de la parte superior de la figura son congruentes, es decir que si superpusiéramos ambos triángulos, los mismos coincidirían. Los triángulos de la parte inferior de la figura son semejantes, lo cual significa que si los superpusiéramos observaríamos que los mismos, si bien no son exactamente iguales, mantienen una relación de proporcionalidad.

a) Determine si el mismo puede inscribirse en una circunferencia. En caso afirmativo, construya la circunferencia que pasa por los cuatro puntos. *(Sugerencia: lea la sección 9.1.7.8, pág. 155)*

b) Construya un cuadrilátero que no pueda inscribirse en una circunferencia, justificando adecuadamente el por qué. *(Sugerencia: tome como punto de partida el gráfico anterior)*

21. En un salón de conferencias de 7 metros de largo por 5 metros de ancho se desea instalar una mesa con forma de polígono regular cuyos lados miden un metro cada uno. La idea es que haya una persona por cada lado de la mesa y se desea que la mesa sea lo más espaciosa posible.

    a) ¿De cuántos lados hay que hacer la mesa?

    b) Se instala un cristal sobre la mesa para evitar que se raye, cuyo precio es de $1200 por metro cuadrado. ¿Cuánto costará el cristal?

22. El diámetro de la circunferencia donde está inscrito un polígono regular es de 10 metros y cada uno de sus lados mide 5 metros. ¿De qué polígono estamos hablando?

9.4. Teoría Complementaria

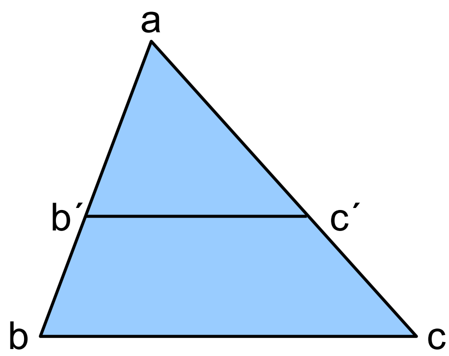
9.4.1. Teorema de Thales en triángulos

El Teorema de Thales tiene una importante aplicación a la semejanza de triángulos, pues nos permite demostrar que las razones entre los lados de triángulos semejantes — *es decir proporcionales* — sólo dependen de los ángulos del mismo. Sin embargo, para poder hablar de esto último, primero debemos hacer la siguiente:

Definición 9.4.1. Dos triángulos $\overset{\triangle}{abc}$ y $a'\overset{\triangle}{b'}c'$ se dirán *congruentes* si tienen dos de sus lados — *y por ende el tercero también* — iguales. Y se dirán *semejantes* si tienen dos de sus ángulos — *y por ende el tercero también* — iguales — *ver* Fig. 9.4.1.

Observemos que dos triángulos semejantes deben ser proporcionales entre sí, pero esto último se desprende como veremos a continuación del Teorema de Thales.

Figura 9.4.2: Teorema de Thales en un triángulo



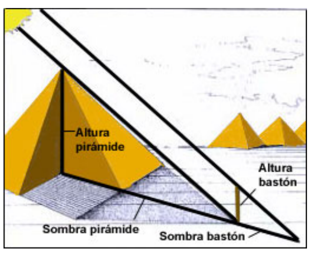
La siguiente figura nos ayudará a ilustrar el Teorema de Thales en un triángulo. En la misma, los triángulos $\overset{\triangle}{abc}$ y $\overset{\triangle}{ab'c'}$ son semejantes, es decir tienen sus ángulos iguales.

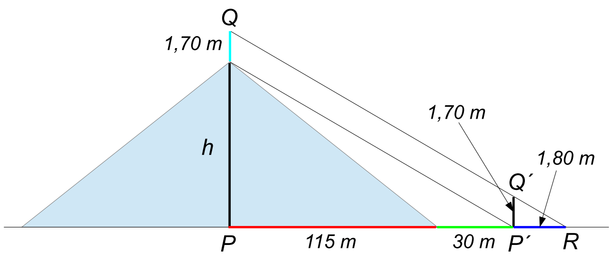
Teorema 9.4.1. *(Thales en un triángulo) Dado un triángulo $\overset{\triangle}{abc}$, si se traza un segmento paralelo $\overline{b'c'}$ a uno de los lados del triángulo, se obtiene otro triángulo $\overset{\triangle}{ab'c'}$ cuyos lados son proporcionales a los del triángulo $\overset{\triangle}{abc}$ —* ver Fig. *9.4.2. Esto es:*

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ab'}} = \frac{\overline{ac}}{\overline{ac'}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{b'c'}}$$

Un interesante problema que puede resolverse a partir del Teorema de Thales en su versión para triángulos es el que presentaremos a continuación en el siguiente:

Ejemplo 9.4.1. *(El problema de la altura de la pirámide de Keops)*: La gran pirámide de Keops tiene una longitud media de los lados de su base que es de aproximadamente 230 metros. Este dato es fácilmente medible por cualquier persona que pueda llegar hasta la base de la misma, y disponga de adecuados elementos de medición. Lo que es más difícil de medir es la altura h de la misma, cosa que puede llegar a hacerse mediante el Teorema de Thales, entre otras herramientas matemáticas. En un viaje a Egipto, me ubiqué en el lugar preciso donde terminaba la sombra de la misma. La distancia hasta la base de la pirámide desde ese punto fue de 30 metros aproximadamente. Mi altura es de 1,70 metros, y mi propia sombra, resultó ser de 1,80 metros aproximadamente. Con estos datos: ¿Podríamos averiguar la altura aproximada de dicha pirámide?.





Solución:

Veremos a continuación que sí se puede, mediante esos datos y una correcta aplicación del Teorema de Thales en triángulos. Probablemente hagamos el mismo razonamiento que hizo Thales hace 2600 años aproximadamente.

De la simple observación de la figura anterior y por una aplicación sencilla del Teorema de Thales en triángulos, vemos que los triángulos $\overset{\triangle}{PQR}$ y $\overset{\triangle}{P'Q'R}$ son semejantes, y por lo tanto todos sus lados proporcionales.

Pero esto último nos autoriza a hacer:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{P'R}}$$

Reemplazando los segmentos por los valores que tenemos:

$$\frac{h + 1{,}70}{1{,}70} = \frac{115 + 30 + 1{,}80}{1{,}80}$$

Y de esta expresión podemos despejar h en muy sencillos pasos:

$$h = \frac{115 + 30 + 1{,}80}{1{,}80} \cdot 1{,}70 - 1{,}70 \approx 136{,}94$$

Es decir según nuestra aproximación, la altura de la gran pirámide es aproximadamente de 136,94 metros. La verdadera altura es de 136,86 metros, y por lo tanto: ¡No hemos errado tanto!

Capítulo 10

Trigonometría

10.1. Teoría Básica

10.1.1. Introducción

En el capítulo anterior vimos que en numerosas oportunidades observamos la presencia de ciertas figuras geométricas elementales en la vida cotidiana, así como también necesitamos comprender la geometría de las mismas a fin de poder resolver problemas prácticos que las involucren. Los triángulos rectángulos ocupan un lugar privilegiado dentro de la geometría y tan grande es su importancia, que dedicaremos un capítulo entero al estudio de los mismos. Pero primero, para justificar la necesidad de su estudio, veamos una serie de situaciones concretas que tranquilamente podrían presentarse ante nosotros en la vida cotidiana, y en donde surgen inmediatamente triángulos rectángulos como figuras geométricas necesarias para modelar y resolver los mismos:

- Imaginemos que deseamos colocar en el patio de nuestra casa una escalera que nos permita tener acceso a la terraza. La altura del techo es de unos $3m$ de alto, y deseamos que la escalera comience a una distancia de $4m$ de la pared. Nos preguntamos cuál será la longitud de dicha escalera, desde el punto inicial en el piso, a cuatro metros de la pared, hasta su punto final en el techo de nuestra casa, a tres metros de altura del piso.

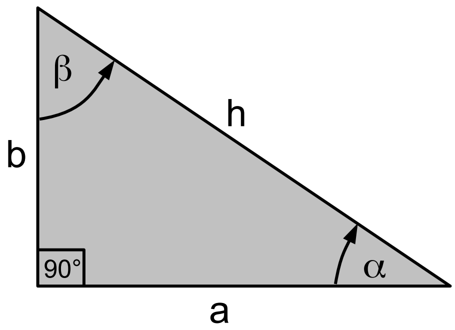
    - Para empezar, observemos que la figura geométrica más próxima a modelar la situación propuesta es un triángulo rectángulo. Un lado del mismo se encuentra sobre la pared, y mide tres metros de alto. El otro lado se encuentra en el piso, más precisamente en el punto exacto donde queremos dar inicio a la escalera, a unos $4m$ de la pared. La diagonal de dicho triángulo — *llamada hipotenusa* — será entonces la longitud de la escalera que deseamos construir.
    - El conocido Teorema de Pitágoras afirma que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma del cuadrado de los catetos. Esto nos permite obtener una ecuación cuya solución será precisamente la longitud de la escalera en cuestión:

    $$h^2 = 3^2 + 4^2$$
    $$\Rightarrow h = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

    - Concluimos pues que nuestra escalera medirá 5 metros de longitud, desde su punto inicial a $4m$ de la pared — *sobre el suelo* — hasta el punto situado en la entrada de la terraza — *sobre la pared* — a 3 metros de altura del piso.

- Luego de construir la escalera del ejemplo anterior, nos percatamos de que el lugar ubicado por debajo de la misma — *para que no quede desaprovechado* — lo podríamos convertir en un cuartito tipo depósito donde poder guardar diversos objetos y herramientas. Para ello construimos una pared sobre el borde de la escalera y colocamos una pequeña puerta de acceso al lugar. Ahora nos interesaría calcular el volumen del mismo, para tener una idea de cuánto lugar disponemos para guardar objetos. Para ello, procedemos como sigue, teniendo presente que el ancho de cada escalón es de un metro:

Figura 10.1.1: TRIÁNGULO RECTÁNGULO



En la siguiente figura puede apreciarse un triángulo rectángulo genérico. El mismo posee un ángulo recto, es decir de 90°. Los lados a y b se llaman *catetos* del triángulo, mientras que su diagonal h suele llamarse *hipotenusa*. El ángulo α suele llamarse ángulo adyacente al cateto a y opuesto al cateto b. Recíprocamente, el cateto a se llama cateto adyacente al ángulo α y opuesto al ángulo β. Opuestamente, el ángulo β suele llamarse ángulo adyacente al cateto b y opuesto al cateto α. Recíprocamente, el cateto b se llama cateto adyacente al ángulo β y opuesto al ángulo α.

- Debemos multiplicar la superficie del triángulo rectángulo de la escalera por la profundidad del lugar, que es de un metro en virtud de que ese es el ancho de los escalones. Teniendo presente que la superficie de un triángulo rectángulo es la mitad de la superficie del rectángulo en cuestión, entonces:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\text{base } \times \text{ altura}}{2} \cdot \text{Profundidad} \\ &= \frac{4m \cdot 3m}{2} \cdot 1m = 6m^3 \end{aligned}$$

- Concluimos entonces que el volumen disponible para guardar objetos es de $6m^3$.

Como pudimos observar en los dos ejemplos anteriores, los triángulos rectángulos surgieron de manera natural. La trigonometría es la rama de la geometría que se ocupa de estudiar las relaciones entre los lados y ángulos de estos últimos, razón por la cual queda establecida la importancia de abordar un estudio sistemático de la misma.

10.1.2. Triángulos rectángulos

Tal como afirmamos al final del párrafo anterior, la trigonometría se ocupa de estudiar las relaciones que hay entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo. Antes de abordar el tema principal, es necesario hacer la siguiente:

Definición 10.1.1. Un triángulo se dirá rectángulo si y sólo si uno de sus tres ángulos es recto, es decir de 90° — *ver* FIG. 10.1.1. Los lados a y b se llaman *catetos* del triángulo, mientras que su diagonal h suele llamarse *hipotenusa*. El ángulo α suele llamarse ángulo adyacente al cateto a y opuesto al cateto b. Recíprocamente, el cateto a se llama cateto adyacente al ángulo α y opuesto al ángulo β. Opuestamente, el ángulo β suele llamarse ángulo adyacente al cateto b y opuesto al cateto α. Recíprocamente, el cateto b se llama cateto adyacente al ángulo β y opuesto al ángulo α.

10.1.3. Relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo

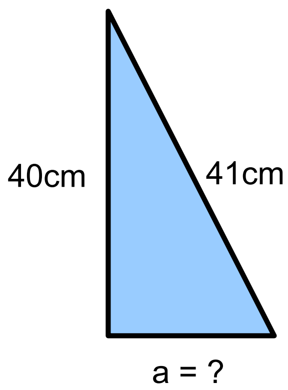
La relación más importante que hay entre los lados de un triángulo rectángulo cualquiera se la debemos al importante TEOREMA DE PITÁGORAS — *ver sección 10.4.1 en la pág. 185* — el cual afirma que:

$$a^2 + b^2 = h^2$$

Ejemplo 10.1.1. Se sabe que un triángulo rectángulo tiene uno de sus lados igual a 9 centímetros y que su hipotenusa es de 41 centímetros. Calcular el cateto faltante.

Solución:

Para empezar, hagamos un esquema de la situación:



Según el Teorema de Pitágoras:

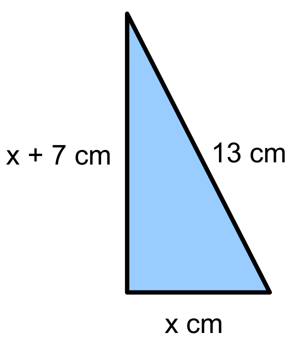
$$\begin{aligned} 40^2 + a^2 &= 41^2 \\ \Leftrightarrow a^2 &= 41^2 - 40^2 \\ \Leftrightarrow a &= \sqrt{1681 - 1600} \\ \Leftrightarrow a &= \sqrt{81} \\ \Leftrightarrow a &= 9 \end{aligned}$$

Luego: El cateto faltante mide 9 centímetros.

Ejemplo 10.1.2. En un triángulo rectángulo uno de sus catetos mide x centímetros, el otro mide $x + 7$ centímetros y su hipotenusa asciende a 13 centímetros. Determinar el valor de ambos catetos.

Solución:

Para empezar, tengamos presente la siguiente figura que ilustra el enunciado del problema:



Según el Teorema de Pitágoras debe ocurrir que:

$$\begin{aligned} x^2 + (x+7)^2 &= 13^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + x^2 + 14x + 49 &= 169 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 14x - 120 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática del último paso, obtenemos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-14 \pm \sqrt{(14)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-120)}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{-14 \pm \sqrt{1156}}{4} \\ &= \frac{-14 \pm 34}{4} \end{aligned}$$

Pero entonces:

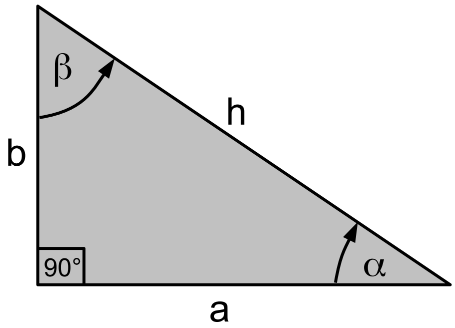
$$x = \begin{array}{l} \nearrow 5 \\ \;\text{ó} \\ \searrow \cancel{-12} \end{array}$$

El valor de $x = -12$ lo descartamos pues no puede ser negativa la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo.

Luego: El cateto menor mide 5 centímetros y el cateto mayor mide 7 centímetros.

10.1.4. Relaciones entre los ángulos de un triángulo rectángulo

En cuanto a las relaciones que hay entre los ángulos de un triángulo rectángulo, las mismas son muy sencillas.



Sabemos que uno de los mismos es recto, es decir de 90°. Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera debe ascender a 180°, concluimos que si α y β son los ángulos restantes, entonces debe ser:

$$\alpha + \beta = 90°$$

Ejemplo 10.1.3. En un triángulo rectángulo se sabe que uno de los ángulos — *digamos* α — es de 26°. Determinar el otro.

Solución:

Simplemente, como la suma entre los dos ángulos agudos debe ser de 90°, despejamos β como sigue:

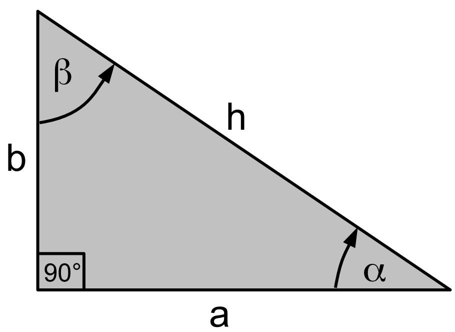
$$\beta = 90° - 26° = 64°$$

Luego: El otro ángulo debe ser de 64°.

10.1.5. Relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo

En las dos secciones previas hemos estudiado por separado las relaciones que debe haber entre los lados entre sí y entre los ángulos entre sí en un triángulo rectángulo. En la presente sección estudiaremos las relaciones que deben cumplirse entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo.

Tomemos como referencia la siguiente figura, que corresponde a un triángulo rectángulo genérico:



Definición 10.1.2. Supongamos que en un triángulo rectángulo genérico, sus catetos son a y b y su hipotenusa es h. Supongamos además que sus ángulo no rectos son α y β respectivamente, siendo α el ángulo adyacente al cateto a y β el ángulo opuesto al mismo — *ver la figura anterior correspondiente a un triángulo rectángulo genérico*. Definimos entonces las siguientes magnitudes, las cuales llamaremos *razones trigonométricas fundamentales*:

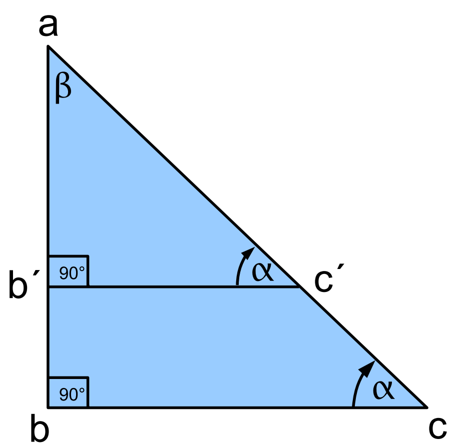
$$\cos(\alpha) = \frac{a}{h} = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$
$$\sin(\alpha) = \frac{b}{h} = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$
$$\tan(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}$$

$$\cos(\beta) = \frac{b}{h} = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$
$$\sin(\beta) = \frac{a}{h} = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$
$$\tan(\beta) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}$$

Observación 10.1.1. Observemos que si hablamos del ángulo α, entonces el cateto opuesto al mismo es b, el cateto adyacente es a y la hipotenusa es h. Por el contrario, si hablamos del ángulo β, entonces el cateto opuesto al mismo es a, el cateto adyacente es β y la hipotenusa h. Es decir, la noción de cateto opuesto y adyacente es relativa al ángulo en cuestión. Mientras para el ángulo α el cateto adyacente es a y el opuesto es b, para el ángulo β ocurre a la inversa.

Teorema 10.1.1. *(Buena definición de las razones trigonométricas fundamentales) En un triángulo rectángulo, las razones trigonométricas dependen exclusivamente de los ángulos α y β del mismo, y son* — por ende — *invariantes entre triángulos rectángulos semejantes.*

Demostración. La demostración se basa en el Teorema de Thales para triángulos. Consideremos dos triángulos rectángulos semejantes, ambos con ángulos agudos α y β, según la figura a continuación:



Los triángulos rectángulos $\overset{\triangle}{abc}$ y $\overset{\triangle}{ab'c'}$ son semejantes, es decir tienen los mismos ángulos. Nos proponemos demostrar que los valores para el $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$ y $\tan(\alpha)$ obtenidos mediante el primer triángulo — $\overset{\triangle}{abc}$ — son iguales a sus correspondientes obtenidos si los calculamos a partir de los lados del segundo triángulo — $\overset{\triangle}{ab'c'}$. Haremos la demostración para el $\sin(\alpha)$, pues las otras dos son similares, y se dejan como interesante ejercicio para el lector.

- El $\sin(\alpha)$ lo podríamos haber obtenido de dos formas:

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{ab}}{\overline{ac}} \qquad\qquad \sin(\alpha) = \frac{\overline{ab'}}{\overline{ac'}}$$

En virtud del TEOREMA DE THALES, podemos asegurar que:

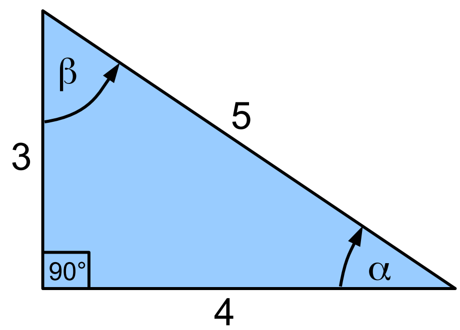
$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ac}} = \frac{\overline{ab'}}{\overline{ac'}}$$

y por ende el valor obtenido para el $\sin(\alpha)$ es el mismo, ya sea lo hubiéramos calculado mediante los lados de $\overset{\triangle}{abc}$ o lo hubiéramos calculado mediante los lados de $\overset{\triangle}{ab'c'}$, tal como queríamos demostrar.

□

Observación 10.1.2. El teorema anterior es de fundamental importancia para establecer la *buena definición* de las razones trigonométricas fundamentales, pues como hay infinitos triángulos rectángulos semejantes entre sí con ángulos α y β respectivamente, si no contáramos con dicho teorema entonces podría ser que a diferentes triángulos rectángulos proporcionales que tengan ángulos α y β respectivamente, el valor de las razones trigonométricas fundamentales difieran entre unos y otros, cosa que haría que la definición 10.1.2 carezca de sentido debido a que las mismas dependerían no sólo de los ángulos, sino también de los lados del triángulo rectángulo.

Ejemplo 10.1.4. Calcular las razones trigonométricas fundamentales del siguiente triángulo rectángulo y obtener — *mediante una de ellas* — sus ángulos α y β.



Solución:

En virtud de la definición 10.1.2, las razones trigonométricas fundamentales se calculan según:

$$\cos(\alpha) = \frac{4}{5} \qquad \sin(\alpha) = \frac{3}{5} \qquad \tan(\alpha) = \frac{3}{4}$$
$$\cos(\beta) = \frac{3}{5} \qquad \sin(\beta) = \frac{4}{5} \qquad \tan(\beta) = \frac{4}{3}$$

Para obtener el ángulo α podemos proceder como sigue:

$$\cos(\alpha) = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = 36°52'12''$$

donde el $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ se obtiene mediante la calculadora, configurada apropiadamente para que trabaje con grados sexagesimales, es decir en modo “D”.

Para obtener el ángulo β podríamos proceder como sigue:

$$\tan(\beta) = \frac{4}{3} \Rightarrow \beta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53°7'48''$$

donde la $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ se obtiene mediante la calculadora, configurada apropiadamente para que trabaje con grados sexagesimales, es decir en modo "D".

Observemos que — *como es de esperar*:

$$\alpha + \beta = 90°$$

por tratarse de un triángulo rectángulo.

10.1.6. Tabla de valores de las razones trigonométricas

Como hemos visto en la sección anterior, gracias al TEOREMA DE THALES pudimos comprobar que se encuentran bien definidas las razones trigonométricas típicas como ser:

$$\operatorname{sen}(\alpha) \qquad \cos(\alpha) \qquad \tan(\alpha)$$

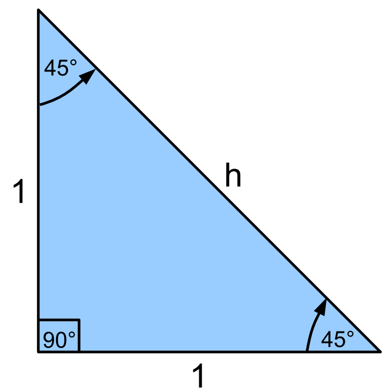
siendo α uno de los ángulos interiores agudos del triángulo rectángulo.

A continuación presentamos una tabla con los valores típicos — *y que el alumno debería conocer* — de las razones trigonométricas anteriores:

	0°	30°	45°	60°
$\operatorname{sen}(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Los valores anteriores surgen del análisis geométrico de ciertos triángulos rectángulos que permiten demostrar que las razones trigonométricas correspondientes a los ángulos contenidos en la tabla son, efectivamente, aquellos valores propuestos. A modo de ejemplo demostraremos las entradas de dicha tabla para $\alpha = 45°$.

En efecto, consideremos el siguiente triángulo rectángulo:



Observemos que según el TEOREMA DE PITÁGORAS:

$$h^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow \boxed{h = \sqrt{2}}$$

Teniendo presente lo anterior, resulta:

$$\cos(45°) = \frac{1}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(45°) = \frac{1}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

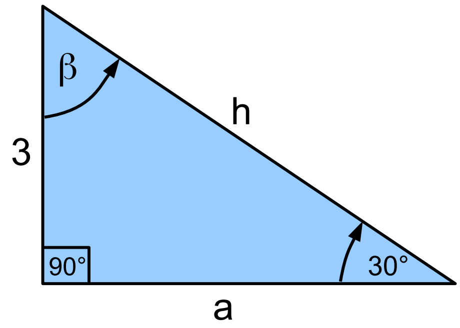
$$\tan(45°) = \frac{1}{1} = 1$$

Nota: Hay construcciones similares que pueden hacerse para comprobar los valores de la tabla correspondientes a los ángulos de 30° y 60° respectivamente, y se dejan como importante ejercicio para el lector.

10.1.7. Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo significa hallar los datos faltantes del mismo, mediante una correcta aplicación de las relaciones entre sus lados y ángulos, cosa que hemos estudiado con detenimiento en las tres secciones previas.

Ejemplo 10.1.5. Resolver el triángulo rectángulo de la figura dada a continuación:



Solución:

Para empezar, determinemos β sencillamente utilizando que la suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo debe ser de 90°:

$$\beta = 60°$$

Para hallar b podemos utilizar que:

$$\tan(30°) = \frac{3}{a}$$

Teniendo presente que — *según la calculadora* — el valor de $\tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, resulta:

$$a = \frac{3}{\tan(30°)} = \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 3\sqrt{3}$$

Para el valor de h podemos utilizar el Teorema de Pitágoras como sigue:

$$\begin{aligned} h^2 &= 3^2 + b^2 \\ &= 3^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 \\ &= 9 + 27 \\ &= 36 \end{aligned}$$

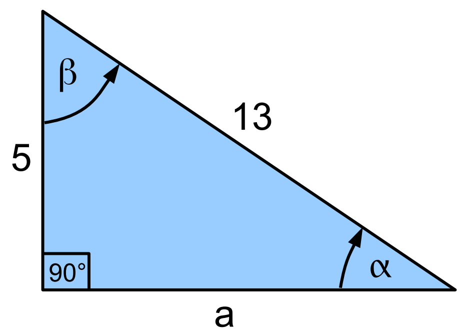
de donde:

$$h = \sqrt{36} = 6$$

Luego: Los datos faltantes son:

$$\beta = 60° \qquad a = 3\sqrt{3} \qquad h = 6$$

Ejemplo 10.1.6. Resolver el triángulo rectángulo de la figura dada a continuación:



Solución:

En este caso es conveniente utilizar el Teorema de Pitágoras para despejar a, como sigue:

$$\begin{aligned} a^2 + 5^2 &= 13^2 \\ \Rightarrow a^2 &= 169 - 25 = 144 \\ \Rightarrow a &= \sqrt{144} \\ \Rightarrow a &= 12 \end{aligned}$$

Para despejar el ángulo β podríamos utilizar alguna de las razones trigonométricas, como ser:

$$\cos(\beta) = \frac{5}{13} \Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) = 67°22'48''$$

Una vez hallado β podemos despejar α utilizando que la suma entre α y β debe ser de 90°:

$$\begin{aligned} \alpha + 67°22'48'' &= 90° \\ \Rightarrow \alpha &= 90° - 67°22'48'' \\ \Rightarrow \alpha &= 22°37'12'' \end{aligned}$$

Luego: Los datos faltantes son:

$$a = 12 \qquad \alpha = 22°37'12'' \qquad \beta = 67°22'48''$$

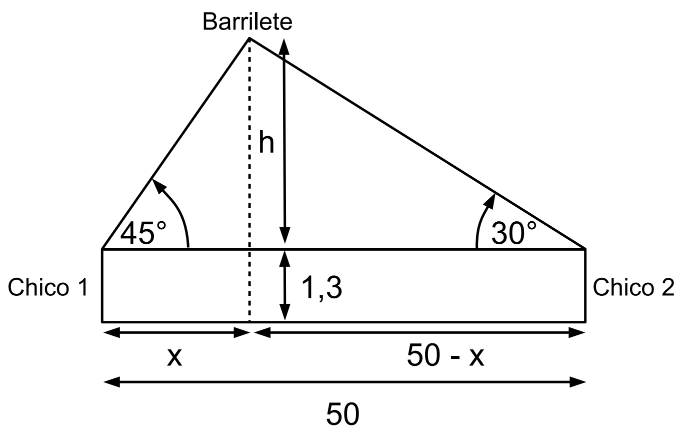
10.1.8. Problemas que se resuelven mediante triángulos rectángulos

Numeroso problemas concretos que se presentan en la vida cotidiana pueden ser resueltos mediante la aplicación de nociones de trigonometría. En la presente sección daremos algunos ejemplos de situaciones de ese estilo, y veremos cómo puede ayudarnos la trigonometría para resolverlos.

Ejemplo 10.1.7. Dos chicos están separados por una distancia de 50 metros. Entre ellos planea un barrilete. Uno de los chicos observa el barrilete bajo un ángulo de elevación de 45° y el otro lo observa bajo un ángulo de elevación de 30°. Suponiendo que la altura de los chicos en promedio es de 1,3 metros: ¿A qué altura del suelo, en forma aproximada, planea el barrilete?

Solución:

Para empezar, hagamos un gráfico representativo de la situación:



Para empezar, observemos que:

$$\tan(45°) = \frac{h}{x} \qquad \tan(30°) = \frac{h}{50 - x}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\tan(45°) = 1 \qquad\qquad \tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

si despejamos h en ambas ecuaciones obtendríamos:

$$h = x \qquad\qquad h = \frac{50 - x}{\sqrt{3}}$$

Igualando ambas expresiones resulta:

$$\begin{aligned} x &= \frac{50 - x}{\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{3}x &= 50 - x \\ \Leftrightarrow \left(1 + \sqrt{3}\right) x &= 50 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{50}{1 + \sqrt{3}} \approx 18{,}3 \end{aligned}$$

Pero entonces:

$$\boxed{x \approx 18{,}3}$$

Teniendo presente la figura ilustrativa, observamos que para obtener la altura H del barrilete sería suficiente sumar 1,3 al valor de h, de donde resulta:

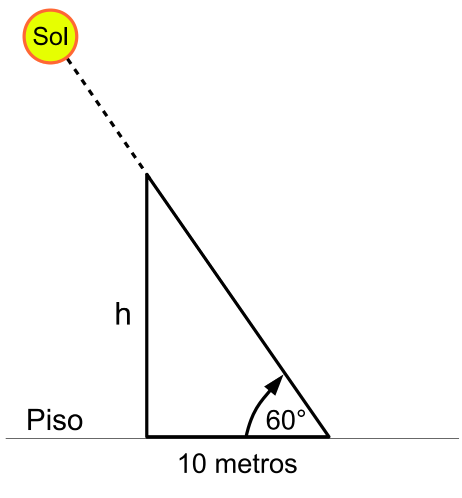
$$H = 18{,}3 + 1{,}3 = 19{,}6$$

Luego: La altura del barrilete con respecto del piso es de 19,6 metros aproximadamente.

Ejemplo 10.1.8. Un mástil produce una sombra de 10 metros cuando le da el sol un día determinado, siendo el ángulo de elevación desde el piso hasta el sol de unos 60° aproximadamente. Calcular la altura del mástil.

Solución:

Para empezar, hagamos un gráfico ilustrativo de la situación:



Para calcular la altura h del mástil, podemos proceder como sigue:

$$\tan(60°) = \frac{h}{10}$$

Teniendo presente que:

$$\tan(60°) = \sqrt{3}$$

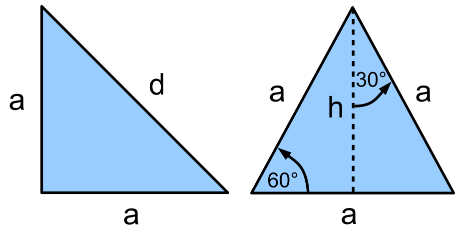
podemos entonces despejar h como sigue:

$$h = \tan(60°) \cdot 10 = 10\sqrt{3}$$

Luego: La altura del mástil es $h = 10\sqrt{3}$ metros.

10.2. Ejercicios

1. Comprobar, teniendo en cuenta la figura a continuación, que:



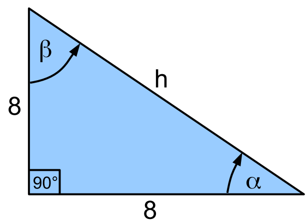
   a) $\cos(45°) = \sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

   b) $\cos(60°) = \frac{1}{2}$ y $\sin(30°) = \frac{1}{2}$.

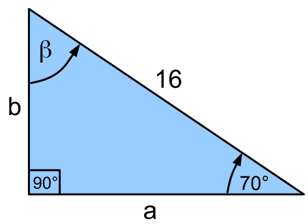
   c) $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Resolver los triángulos rectángulos correspondientes a las figuras presentadas en cada caso.

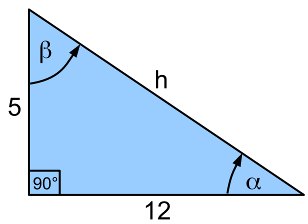
   a)



   b)



   c)



10.3. Problemas

1. Se diseña un techo a dos aguas con los siguientes requerimientos: un ala tiene 8 metros y la otra 5 metros. El ala de 8 metros tiene una elevación de 30°, la altura del techo es de 4 metros y se colocarán vigas que unirán ambas alas en su base.

   a) Averiguar la longitud aproximada de las vigas.

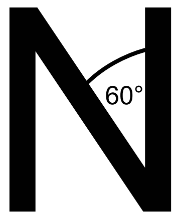
   b) Calcular el ángulo de elevación del ala menor.

2. Calcular el área de un triángulo equilátero de 24 centímetros de perímetro.

3. Desde cierta altura de un edificio, un hombre observa a un amigo con un ángulo de declinación de 30°. Luego de bajar 60 metros, el ángulo de declinación es de 60°. ¿A qué distancia del edificio se encuentra su amigo?

4. En una mudanza una familia tiene que encargarse de embalar todas las cosas. La empresa de mudanzas deja canastos de 50 cm. de ancho por 50 cm. de largo por 50 cm. de alto. Aparentemente sirven para embalar todo, hasta que aparece el retrato de la abuela que tiene 50 cm. de ancho por 75 cm. de alto. Averiguar si hay algún modo de guardarlo sin que quede alguna parte afuera del canasto.

5. Con una varilla de 80 cm. de largo se desea construir una letra *N* como se observa en la figura. Hallar la medida de cada tramo.



6. Desde la terraza de un edificio de 80 metros de altura se ve un automóvil con un ángulo de depresión $\alpha = 29°10'$. Calcular la distancia del automóvil a la base del edificio.

7. Determinar la altura de un árbol, sabiendo que su sombra mide 8 metros cuando el ángulo de elevación del Sol es de 53°. Realizar un dibujo del problema.

8. Un avión se encuentra a 2300 metros de altura cuando comienza su descenso para aterrizar. ¿Qué distancia debe recorrer el avión antes de tocar la pista, si baja con un ángulo de depresión de 25°? Realizar un gráfico del problema.

9. Un edificio tiene una altura de 75 metros. ¿Qué medida tiene la sombra que proyecta cuando el Sol tiene un ángulo de elevación de 43°? Realizar un gráfico del problema.

10. La longitud del hilo que sujeta un barrilete es de 15 m. y el ángulo de elevación es de 30°. ¿Qué altura alcanza el barrilete?

11. En un polígono regular de n lados se inscribe un círculo de radio r. Usar las razones trigonométricas y encontrar una expresión para:

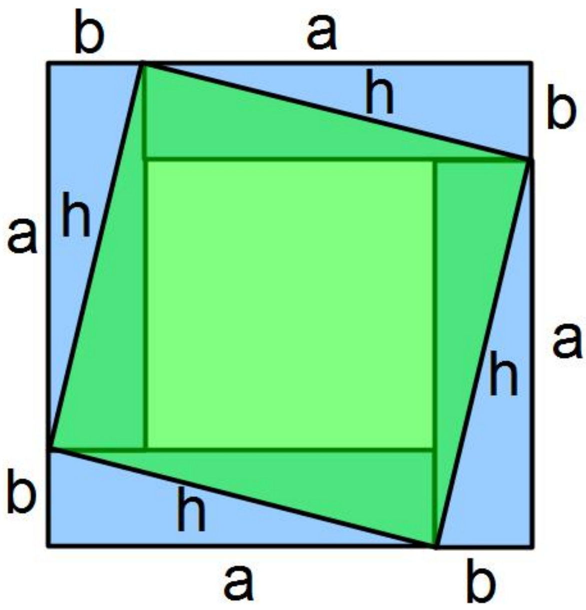
    a) El perímetro del polígono.

    b) El área del polígono.

12. Olga quiere subir hasta el borde de un muro. Para ello ha tomado una escalera, pero no le sirve porque tiene la misma altura que el muro. Como es muy ingeniosa, pone un cajón de 20 cm. de alto y lo ha colocado a un metro de distancia del pie del muro. Si al poner sobre el cajón la escalera, esta llega al borde del muro: ¿Qué altura tiene el muro?

13. Determine las tangentes de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo sabiendo que un cateto es $\sqrt{3} - 1$ cm. y que el área es de 1 cm^2.

Figura 10.4.1: DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS



La siguiente figura nos ayudará a demostrar el TEOREMA DE PITÁGORAS.

10.4. Teoría Complementaria

10.4.1. El Teorema de Pitágoras

Teorema 10.4.1. (PITÁGORAS) *Es un conocido resultado que afirma que en un triángulo rectángulo, la suma del cuadrado de sus catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. En símbolos esto es:*

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Demostración. Para demostrar este importante resultado tenemos que recurrir al análisis de una figura — *ver* FIG. 10.4.1.

La figura 10.4.1 es un cuadrado de lado $l = a + b$. Su área A puede obtenerse según:

$$A = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Por otro lado, si el lector observa atentamente la figura antes mencionada, hay otra forma de obtener su área, si la subdividimos como la suma de 4 triángulos rectángulos de lados a y b e hipotenusa h, con más la del cuadrado central de lado igual a h. Si calculáramos el área según esta subdivisión, obtendríamos:

$$A = 4 \cdot \frac{ab}{2} + h^2 = 2ab + h^2$$

pues habría que sumar el área de los cuatro rectángulos más el área del cuadrado de lado h.

Igualando las áreas obtenidas resulta:

$$\begin{aligned} a^2 + \cancel{2ab} + b^2 &= \cancel{2ab} + h^2 \\ \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 &= h^2 \end{aligned}$$

Luego: Efectivamente, si el triángulo de catetos a y b e hipotenusa h es rectángulo, entonces:

$$a^2 + b^2 = h^2$$

tal como afirma el TEOREMA DE PITÁGORAS.

□

Parte IV

Funciones

Capítulo 11

La noción de Función

11.1. Teoría Básica

Este capítulo tiene como objetivo introducir el tema *funciones*, mostrando su presencia natural en la vida real, a través del análisis de su comportamiento. Quizás la idea matemática más útil para modelar el mundo real sea el concepto de función. Para comprender qué es una función veremos un ejemplo concreto donde surge naturalmente la idea de función, pero primero debemos definir qué es un sistema de coordenadas.

11.1.1. Sistemas de Coordenadas

Definición 11.1.1. Un sistema de coordenadas es un sistema de referencia que nos permite ubicar puntos en el plano $\mathbb{R}^2$. En matemática y física suele usarse un sistema de ejes perpendiculares en cuya intersección se ubica el origen $o = (0,0)$. Este sistema se conoce como sistema de *ejes cartesianos ortogonales* — *ver* FIG. 11.1.1. Al eje vertical se lo conoce como *eje de ordenadas*. Al eje horizontal se lo llama *eje de abscisas*.

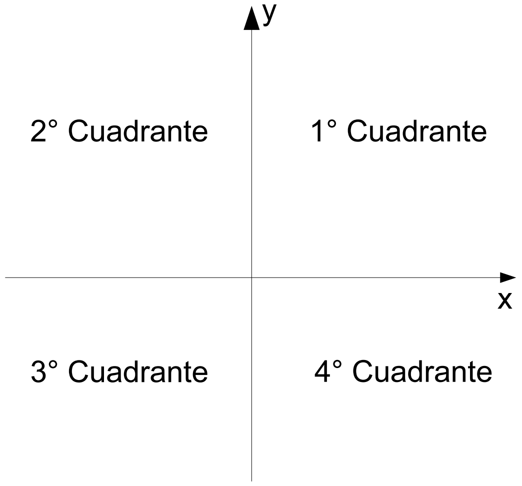
Observación 11.1.1. Tanto el eje de las ordenadas como el eje de las abscisas son rectas numeradas y sus elementos son números reales. En general, la variable utilizada por defecto para designar un número real sobre el eje de las abscisas suele ser la variable x, y la variable utilizada por defecto para designar un número real sobre el eje de ordenadas suele ser la variable y. Por esta razón el eje de abscisas suele ser llamado "*eje x*" y el eje de ordenadas suele ser llamado "*eje y*". Obviamente — *si el problema lo requiere* — no hay ningún problema en utilizar otras variables para designar a los elementos del eje de abscisas y ordenadas respectivamente.

Como anticipamos en la observación anterior, ambos ejes son rectas numeradas, y sus elementos son números reales. Las escalas utilizadas en cada eje pueden ser distintas pero siempre respetando en cada eje la unidad elegida. A partir de estos ejes coordenados, todo punto del plano puede ser identificado mediante un par ordenado de números reales (a,b). La primera componente se representa sobre el eje de abscisas y la segunda sobre el eje de ordenadas, los cuales designaremos por defecto como "*eje x*" y "*eje y*", conforme la observación hecha en el párrafo anterior. Si trazamos una recta vertical cortando al eje x en la posición $x = a$ y una recta horizontal a la altura $y = b$ en el eje de ordenadas, entonces el punto (a,b) se obtiene en la intersección de ambas rectas — *ver* FIG. 11.1.2.

Veamos algunos ejemplos:

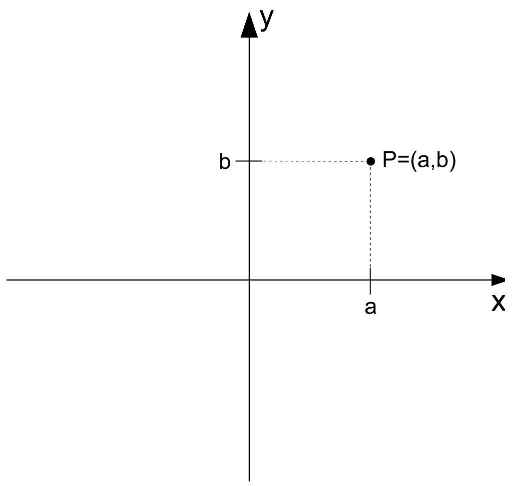
- Si el punto P es de la forma $P = (0,y)$ entonces la abscisa del mismo es $x = 0$, y por lo tanto el mismo se ubicará sobre el eje y.
- Si el punto P es de la forma $P = (x,0)$ entonces su ordenada es $y = 0$, razón por la cual el mismo se ubicará sobre el eje x.

Figura 11.1.1: Sistema de Coordenadas



En la figura puede observarse un sistema de coordenadas ortogonales. El mismo divide al plano en cuatro cuadrantes, el primero corresponde a la región del plano donde $x > 0$ e $y > 0$. El segundo a la región donde $x < 0$ e $y > 0$. El tercero a $x < 0$ e $y < 0$ y el cuarto a $x > 0$ e $y < 0$.

Figura 11.1.2: Representación de Puntos en un Sistema de Coordenadas



Todo punto P del plano puede ser identificado mediante un par ordenado de números $P = (a, b)$. La primera componente se representa sobre el eje x y la segunda sobre el eje y. Si trazamos una recta vertical cortando al eje x en la posición $x = a$ y una recta horizontal a la altura $y = b$ en el eje de ordenadas, entonces el punto (a, b) se obtiene en la intersección de ambas rectas. Recordemos que a es la abscisa del punto P y b es su ordenada.

11.1.2. La noción de función

Ahora que ya definimos lo que es un sistema de coordenadas, podemos retomar con el ejemplo prometido al principio de la sección.

Supongamos que somos parte de un equipo de meteorólogos que quiere estudiar cómo varía la temperatura ambiente de una ciudad, en un intervalo de tiempo dado, un día en particular del año. O sea, nos interesa saber qué ocurre con la temperatura ambiente en un intervalo de tiempo determinado, un día en particular del año. Para fijar ideas, supongamos que el intervalo de tiempo fuera entre las 12 horas del mediodía y las 18 horas de aquel supuesto día.

Si llamamos T a la variable que indicará la temperatura ambiente en grados centígrados y t a un momento dado — *medido en horas* — del intervalo de tiempo comprendido entre las 12 y las 18 horas, podemos entonces elegir como sistema de coordenadas uno tal que:

- El eje de las abscisas contenga los valores de tiempo, razón por la cual será conveniente llamarle "*eje t*", y los números reales situados en él representarán la hora exacta del día en que realizaremos una medición de temperatura.
- El eje de las ordenadas contenga los valores de temperatura, en grados centígrados, razón por la cual será conveniente llamarle "*eje T*". Y como dijimos antes, los números reales contenidos en él representarán valores de temperatura medidos en grados centígrados.

Para cada valor $t \in [12, 18]$, efectuaremos una medición de temperatura, la cual dará como resultado un valor en grados centígrados al que llamaremos $T(t)$. ¿Por qué $T(t)$? Porque T indica que se trata de un valor de temperatura, y como la temperatura claramente depende del momento de tiempo en que se efectúe la medición, la presencia de "t" entre paréntesis en la expresión $T(t)$ indicará que el valor de temperatura T corresponde a aquel medido en el instante t.

De esta forma, para cada valor de $t \in [12, 18]$, corresponderá un valor $T(t)$ que indicará la temperatura — *medida en grados centígrados* — que se ha registrado en dicho momento, al efectuar la medición. Podemos así construir — *para cada valor de* $t \in [12, 18]$ — un punto en el plano, cuyas coordenadas sean:

$$(t, T(t))$$

A modo de ejemplo, si la primera medición efectuada — *que es cuando* $t = 12$ *horas* — nos hubiera dado como resultado una temperatura de 20°C, entonces el punto del plano correspondiente sería:

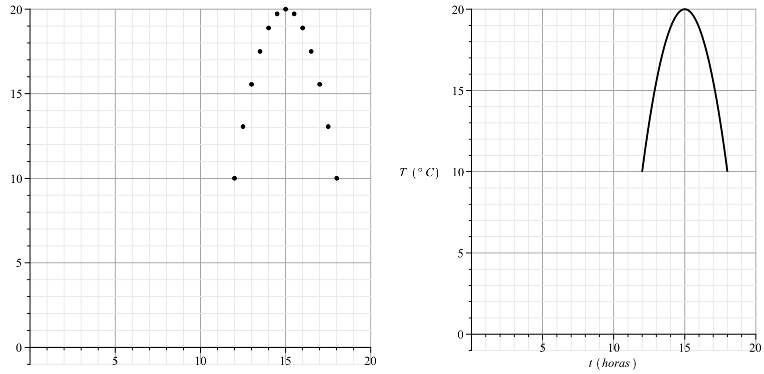
$$(12\text{hs}, 20°\text{C})$$

Observemos que en el intervalo de tiempo [12, 18], hay *infinitos* valores de tiempo, razón por la cual es previsible que no podremos efectuar una cantidad infinita de mediciones. Lo que suele hacerse en la práctica es realizar una serie de mediciones puntuales, a intervalos de tiempo discretos[1], suponiendo que la variación de temperatura entre una medición y la siguiente deberá producirse en forma gradual, entre ambos puntos. Hecha esta aclaración, es momento de convenir a qué intervalos de tiempo efectuaremos las mediciones puntuales. Digamos pues, que lo hacemos a intervalos de media hora. Imaginemos que efectuamos tales mediciones y las volcamos en una tabla, como sigue:

t (hora)	$T(t)$ *en °C*	*t (hora)*	$T(t)$ *en °C*
12	10	15,5	$\frac{355}{18}$
12,5	$\frac{235}{18}$	16	$\frac{170}{9}$
13	$\frac{140}{9}$	16,5	$\frac{35}{2}$
13,5	$\frac{35}{2}$	17	$\frac{140}{9}$
14	$\frac{170}{9}$	17,5	$\frac{235}{18}$
14,5	$\frac{355}{18}$	18	10
15	20		

[1] La palabra *discreto* alude a que entre una medición y la siguiente habremos de dejar pasar un intervalo de tiempo determinado. Por ejemplo, podríamos elegir efectuar una medición cada media hora, suponiendo que la variación de temperatura entre dos mediciones consecutivas ha de ser gradual.

Figura 11.1.3: Temperatura entre las 12 y las 18 horas



Izquierda: Representación de las mediciones discretas de temperatura — *medida en grados centígrados* — a intervalos de media hora, desde las 12 del mediodía hasta las 18 horas de un día en particular del año.

Derecha: Curva suave que une los puntos representados en el gráfico de la izquierda. Dicha curva representa la función temperatura T — *medida en grados centígrados* — en función del tiempo t — *medido en horas* — para el intervalo de tiempo $[12, 18]$.

Si representamos en un gráfico los puntos de la tabla, obtendríamos los puntos descriptos en el lado izquierdo de la Fig. 11.1.3.

Naturalmente, hay una suposición importantísima a la hora de hablar de la "*Temperatura $T(t)$ en función del tiempo t*", y dicha suposición es que la temperatura varía en forma continua, de un momento a otro, y que la misma describe una curva continua en el plano, de la cual nosotros tan solo hemos determinado algunos puntos, a saber: los contenidos en la tabla anterior. Basados en esta suposición, si uniéramos los puntos contenidos en el gráfico izquierdo de la Fig. 11.1.3 mediante una curva continua, obtendríamos una curva similar a la representada en el lado derecho de la Fig. 11.1.3. Dicha curva será el gráfico de la función $T(t)$ en el intervalo de tiempo $[12, 18]$.

El gráfico de una función constituye una herramienta de incalculable valor a la hora de extraer conclusiones sobre la misma. A modo de ejemplo, a continuación extraeremos algunas posibles conclusiones del gráfico de $T(t)$ descripto en el lado derecho de la Fig. 11.1.3:

- La amplitud térmica en el intervalo de tiempo $[12, 18]$ fue de diez grados, pues la temperatura varió entre los 10°C y 20°C.
- La temperatura mínima registrada en dicho lapso de tiempo fue de 10°C, y se registro a las 12 horas, y a las 18 horas.
- La temperatura máxima registrada en dicho lapso de tiempo fue de 20°C, y se registro a las 15 horas.
- Se registro un aumento de temperatura en el intervalo de tiempo $[12, 15]$, y un descenso de temperatura en el intervalo de tiempo $[15, 18]$.

Hasta ahora logramos determinar en forma empírica la curva de temperatura entre las 12 y las 18 horas. Lejos de conformarse con esto último, nuestro equipo de meteorólogos desea intentar encontrar una explicación matemática al fenómeno de la evolución de la temperatura $T(t)$ en dicho intervalo de tiempo. Esto último implicaría encontrar una fórmula matemática que permita, para cada valor de tiempo t, entre las 12 y las 18 horas, obtener un valor de temperatura $T(t)$ que se corresponda con el empíricamente medido.

Sin entrar en detalles sobre el procedimiento implementado para hallar tal fórmula, digamos nada más que logramos determinar que para todo momento de tiempo $t \in [12, 18]$, la fórmula que permite expresar la temperatura $T(t)$ en función del tiempo es:

$$T(t) = -\frac{10}{9}(t-12)(t-18)+10$$

El lector puede comprobar que si reemplaza t por cualquier valor en el rango del intervalo $[12, 18]$, el valor de $T(t)$ obtenido se corresponderá con el representado en la FIG. 11.1.3.

Como habrá quedado claro, la "*fórmula*" de una función no es en absoluto lo más relevante de la misma. En torno a la noción de función, hay numerosos elementos importantes a tener en cuenta. Si bien históricamente, antes de precisar bien la noción de función se le solía dar una importancia muy grande a la fórmula de la misma, modernamente se conoce que la fórmula o expresión matemática de una determinada función, no es lo más importante. De hecho, hay numerosos factores y elementos a tener en cuenta a la hora de hablar de funciones. Trataremos de ir enumerándolos, ayudados por el ejemplo anterior:

- Toda función debe tener un nombre. En nuestro ejemplo elegimos llamar T a la función temperatura.
- Hay que identificar cual es la variable independiente de la cuales depende la función a estudiar, y ponerle un nombre. En nuestro caso, la variable independiente es el tiempo, y elegimos llamarle t.
- Por otra parte, no cualquier valor de t es relevante en nuestro problema. No nos interesa lo que ocurra a las 10 de la mañana o bien a las 19 horas. En nuestro problema, el intervalo de tiempo que interesa es aquel comprendido entre las 12 del mediodía y las 18 horas. Esto tiene que ver con el *dominio* de la función $T(t)$. El dominio de una función está formado por todos aquellos valores de la variable independiente que interesan a los efectos del problema. En nuestro caso:

  $$\mathrm{Dom}(T) = [12, 18] = \{t \in \mathbb{R} : 12 \leq t \leq 18\}$$

- Hablar de función es hablar de *correspondencia*. A cada valor de $t \in [12, 18]$ — *el dominio de nuestra función* — corresponde un valor de temperatura $T(t)$. Es decir para cada valor t del dominio de nuestra función, la misma devolverá o tendrá asociado algún valor. No es obligatorio que las funciones devuelvan números reales, pero la mayoría de las funciones que estudiaremos a lo largo de este capítulo devuelven por resultado números reales. En este sentido, el *codominio* de una función es el conjunto de *posibles* valores que devolverá la función. En el caso de $T(t)$, los posibles valores que devolverá la misma son números reales, y en este sentido podemos decir que:

  $$\mathrm{Cod}(T) = \mathbb{R}$$

  lo cual significa que el codominio de T es el conjunto de números reales. Observemos que no todo número real es un valor que efectivamente devuelva la función $T(t)$. Sin ir muy lejos, en el intervalo de tiempo $[12, 18]$, en ningún momento se ha registrado una temperatura de 40°C. Sin embargo, cuando decimos que $\mathrm{Cod}(T) = \mathbb{R}$, lo que queremos indicar es que el resultado de la función $T(t)$ es un número real, sin importar si dicho número real es un valor que efectivamente alcanza la función o no. El rango de posibles valores que efectivamente toma la función $T(t)$ tiene que ver con la noción de *imagen*, de la cual nos ocuparemos a continuación.

- Ya dijimos que no todo valor del $\mathrm{Cod}(T)$ es un valor efectivamente alcanzado por la función. Más aún, dimos como ejemplo el caso del valor 40°C, que en ningún momento es alcanzado por la función T en el intervalo de tiempo $[12, 18]$. Al conjunto de valores posibles que efectivamente toma la función T, lo llamaremos "*imagen de T*", y se nota de la siguiente manera:

  $$\mathrm{Im}(T) = \{T(t) : t \in \mathrm{Dom}(T)\}$$

  Es decir, la imagen de la función T está formada por todos aquellos valores del codominio que son efectivamente alcanzados por la función T. De una simple apreciación del gráfico de la misma, podemos concluir que:

  $$\mathrm{Im}(T) = [10, 20]$$

  pues el rango posible de grados centígrados efectivamente alcanzados en el período de tiempo comprendido entre las 12 y las 18 horas del día en cuestión, fue precisamente de entre 10°C y 20°C. Observemos además que en general:

  $$\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathrm{Cod}(T)$$

  pues tal como la hemos definido, la imagen consta de aquellos valores del codominio que son efectivamente alcanzados por la función T.

Entre los numerosos ejemplos donde puede observarse la importancia de la noción de función, podemos citar algunos:

- En física suele estudiarse la función que relaciona la distancia recorrida por un móvil en función del tiempo y de esta forma poder predecir el lugar en que se encontrará el mismo en un momento de tiempo determinado.
- En biología suele estudiarse la función que relaciona el número de bacterias que hay en un cultivo en función del tiempo, y de esta forma poder predecir — *por ejemplo* — la tasa de reproducción de las mismas.
- En química, para un volumen fijo de gas — *por ejemplo el contenido en un tubo de oxígeno medicinal* — suele estudiarse la presión de dicho gas en función de la temperatura a la que esté sometido el recipiente que lo contiene, ya que se conoce que la presión del mismo es directamente proporcional a esa temperatura.

En casi todo fenómeno natural se observa que una cantidad depende de otra. De esta forma surge naturalmente la idea o noción de *variable independiente* y la de *variable dependiente*. Y el término *función* suele utilizarse para describir esta dependencia de una cantidad sobre otra. Por ejemplo:

- La estatura de una persona depende entre otros factores de la edad de la misma. Si designamos por x a la edad de una persona en particular y por $y(x)$ a la estatura de dicha persona cuando su edad es x, entonces la variable independiente será x y la variable dependiente será y.
- La temperatura ambiente en un lugar determinado y un día en particular, suele depender del tiempo, es decir del momento del día en que se la mida. Si llamamos t al momento del día en que se efectúa la medición de temperatura y $T(t)$ a la temperatura registrada en ese momento, entonces en este contexto t sería la variable independiente y T sería la variable dependiente.
- La distancia recorrida por un móvil que se mueve con velocidad constante, dependerá de lapso de tiempo que dure dicho movimiento. Si llamamos t al lapso de tiempo que dura el movimiento, y $D(t)$ a la distancia recorrida por el móvil en dicho lapso de tiempo, entonces t sería la variable independiente y D la variable dependiente.

A la hora de pensar en magnitudes que dependen de otras magnitudes, son incontables los ejemplos que pueden venirnos a la mente:

- El área de un círculo es función de su radio.
- El peso de un astronauta — *es decir la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la* Tierra *sobre el mismo* — es función de la altura h en que se encuentre el astronauta por encima de la superficie de la Tierra.
- El precio de un artículo es función de la demanda de ese artículo.
- El número de bacterias en un cultivo es función del tiempo.

11.1.3. La Definición de Función

Luego de haber debatido numerosos ejemplos donde surge naturalmente la idea intuitiva de función, nos encontramos en condiciones de establecer la siguiente:

Definición 11.1.2. Dados dos conjuntos A y B, una función f es una regla bien definida tal que a cada elemento x del conjunto A le hace corresponder uno y sólo un elemento $y = f(x)$ del conjunto B.

Simbólicamente se expresa del siguiente modo:

$$f : A \longrightarrow B$$

y se lee f es una función de A en B.

- Al conjunto A lo llamaremos *"dominio de f"* y lo notamos según:

$$A = \mathrm{Dom}\,(f)$$

- Al conjunto B lo llamaremos *"codominio de f"*, y lo notaremos según:

$$B = \mathrm{Cod}\,(f)$$

- Al valor que toma la función f en el elemento $x \in A$ lo llamaremos *"imagen de x por f"*, y lo notaremos según $f\,(x)$.

- Al conjunto de todas las imágenes por f de los elementos x del conjunto A, lo designaremos por *"imagen de f"*, y lo notaremos según:
$$\mathrm{Im}\,(f) = \{f\,(x) : \ x \in A\}$$

- Como cada imagen $f\,(x) \in \mathrm{Cod}\,(f)$, entonces es claro que:

$$\mathrm{Im}\,(f) \subseteq \mathrm{Cod}\,(f)$$

- Al símbolo que elijamos para designar los elementos del dominio de f, lo llamaremos "*variable independiente*". En la definición elegimos llamar "x" a los elementos del conjunto $A = \mathrm{Dom}\,(f)$, razón por la cual la variable independiente será en este caso: x.

- Al símbolo que elijamos para designar los elementos del codominio de f, lo llamaremos "*variable dependiente*". En la definición elegimos llamar "y" a los elementos del conjunto $B = \mathrm{Cod}\,(f)$, razón por la cual la variable dependiente será en este caso: y.

- Como los valores de y — *la variable dependiente* — dependen de los valores de x — *la variable independiente* — a través de la regla que impone la función que llamamos f, entonces suele escribirse que:
$$y = f\,(x)$$
en alusión a que y es función de x.

Es útil considerar a una función como una máquina según el siguiente esquema:

Diagrama de máquina de f

$$x \xrightarrow{\text{Entrada}} \boxed{\text{Función}} \xrightarrow[\text{Salida}]{} f\,(x)$$

Si x está en el dominio de la función f, entonces cuando se introduce x en la máquina, es aceptada como una *entrada* y la máquina produce una *salida* $f\,(x)$ de acuerdo con la regla que impone la función. Así, se puede considerar:

- Al dominio como el conjunto de todas las entradas posibles.

- Al codominio como el conjunto de todas las salidas posibles.

- Y a la imagen como el conjunto de aquellos valores para las salidas, que efectivamente son alcanzados por la función.

Ejemplo 11.1.1. Sea $f\,(x) = 3x^2 + x - 5$. Evaluar los siguientes valores de la función:

1. $f\,(-2)$

2. $f(0)$

3. $f(4)$

4. $f\left(\frac{1}{2}\right) f(x) = \sqrt{x}$

Solución:

1. $f(-2) = 3(-2)^2 + (-2) - 5 = 5$

2. $f(0) = 3(0)^2 + (0) - 5 = -5$

3. $f(4) = 3(4)^2 + (4) - 5 = 47$

4. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) - 5 = -\frac{15}{4}$

Ejemplo 11.1.2. Si un astronauta pesa 130 libras en la superficie de la Tierra, entonces su peso cuando está h millas arriba de la misma se expresa mediante la función:

$$f(h) = 130 \cdot \left(\frac{3960}{3960 + h}\right)^2$$

1. ¿Cuál es su peso cuando está 100 millas sobre la Tierra?

2. Construya una tabla de valores para función f que de el peso a alturas de 0 a 500 millas, a intervalos de 100 millas. ¿Qué concluye la tabla?

Solución:

1. Se desea el valor de la función f cuando $h = 100$, es decir se debe calcular $f(100)$.

$$f(100) = 130 \cdot \left(\frac{3960}{3960 + 100}\right)^2 = 123{,}67$$

Luego: A una altura de 100 millas, pesa 124 libras.

2. La tabla proporciona el peso del astronauta, redondeado al próximo valor más cercano, a incrementos de 100 millas. Los valores de la tabla se calculan con en el punto anterior:

h	$f(h)$
0	130
100	124
200	118
300	112
400	107

La tabla indica que mientras más alto vaya el astronauta, menos pesa.

11.1.4. Dominio de una función

El dominio de una función es el conjunto de las entradas para la función. El dominio de una función se puede expresar de forma explícita. Por ejemplo si se escribe así:

$$f(x) = x^2,\ 0 \leq x \leq 5$$

entonces el dominio es el conjunto de los números reales para los cuales $0 \leq x \leq 5$. Si la función está dada por una expresión algebraica y el dominio no se enuncia de manera explícita, entonces por convención el dominio de la función es el dominio de la expresión algebraica. Es decir, el conjunto de los números reales para los que la expresión se define como un número real.

En general, se suele tomar las siguientes notaciones:

$$\mathrm{Dom}(f) \text{ ó } \mathrm{D}_f$$

siendo la primera la que usualmente adoptaremos a lo largo del libro.

Por ejemplo, si:

$$f(x) = \frac{1}{x-4}$$

entonces la función f no estaría definida en $x = 4$, razón por la cual:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - (4) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 4\}$$

Ejemplo 11.1.3. Determinar el dominio de cada función:

1. $$f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

2. $$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

3. $$f(x) = \frac{x}{\sqrt{(x+1)}}$$

Solución:

1. La función no está definida cuando el denominador es cero. Puesto que:

   $$f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$$

   se puede ver que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Pero entonces:

   $$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0,\ 1\}$$

2. No se puede calcular la raíz cuadrada de un número negativo, por lo tanto para calcular el $\mathrm{Dom}(f)$ debemos imponer que:

   $$9 - x^2 \geq 0$$

   Resolviendo esta inecuación, resulta ser:

   $$\mathrm{Dom}(f) = [-3, 3]$$

3. El argumento de una raíz cuadrada no puede ser negativo, así como tampoco es factible dividir por 0, razón por la cual para calcular el $\mathrm{Dom}(f)$ procedemos como sigue:

   $$x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \Leftrightarrow \boxed{x \in (-1, +\infty)}$$

   Pero entonces:

   $$\mathrm{Dom}(f) = (-1, +\infty)$$

11.1.5. Cuatro formas de definir una función

Para entender el proceso de definición de una cierta función $f(x)$, podemos enumerar una lista con las maneras más usuales en que normalmente se realiza su definición:

- **Descriptivamente:** Mediante una regla que describa con palabras las operaciones que hay que aplicar a un elemento x del dominio A para obtener su respectiva imagen y en el codominio B.
- **Analíticamente:** Es decir, mediante una expresión explícita.
- **Gráficamente:** Por medio de un gráfico.
- **Numéricamente:** Por medio de una tabla de valores.

A continuación presentaremos ejemplos de cómo realizar la definición de una función $f(x)$ según las distintas formas enumeradas en los cuatro puntos anteriores.

11.1.6. Definición de una función de forma descriptiva

En este caso debemos dar una regla que permita al lector construir los valores de la función $f(x)$, mediante la aplicación de dicha regla. Por ejemplo, podemos definir la función:

$$y = f(t)$$

que representa la población mundial — *medida en millones de personas* — en el instante de tiempo t — *medido en años* — tomando como punto de partida o tiempo inicial el año $t = 0$.

11.1.7. Definición de una función de manera analítica

Es la forma más común de definir una función, mediante una expresión como por ejemplo:

$$A(r) = \pi r^2$$

es la función que representa el área de un círculo de radio r, en función de dicho radio.

11.1.8. Definición de una función en forma gráfica

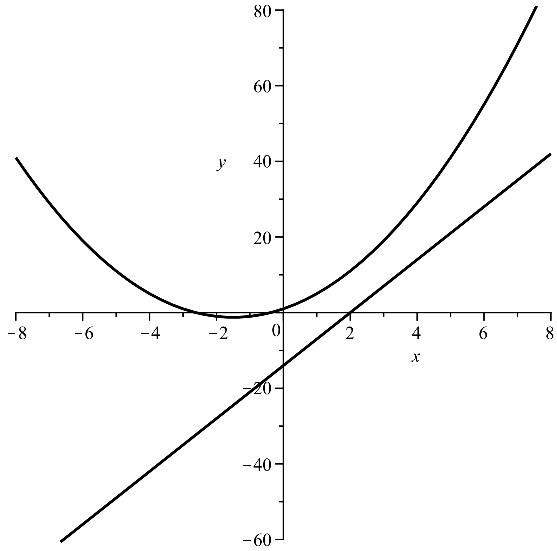
En esta forma de definir una función, lo que hacemos es mostrar el gráfico de la misma. Por ejemplo en la Fig. 11.1.4, puede observarse el gráfico de la función $A(r) = \pi r^2$ definida de manera algebraica en el ejemplo anterior.

11.1.9. Definición de una función en forma numérica

Esta forma de definir una función consiste en realizar una tabla de valores. Por ejemplo el costo de enviar una carta por correo de primera clase está dado por la siguiente tabla de valores, que relaciona el costo C en \$ en función del peso de la carta en onzas:

x medido en onzas	$C(x)$ en \$
$0 < x \leq 1$	0,37
$1 < x \leq 2$	0,60
$2 < x \leq 3$	0,83
$3 < x \leq 4$	1,06

Figura 11.1.4: Definición de una función en forma visual



En la figura puede observarse el gráfico de la función $A(r) = \pi r^2$, que representa el área de un círculo de radio r.

11.1.10. El gráfico de una función

Si $f(x)$ es una función con dominio A, entonces el gráfico de f es el conjunto de pares ordenados:

$$\mathrm{Gra}(f) = \{(x, f(x)) : \ x \in A\}$$

En otras palabras, el gráfico de f es el conjunto de los puntos del plano (x, y) tales que $y = f(x)$.

A modo de ejemplo, en la Fig. 11.1.5 puede observarse el gráfico de la función $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$. Se puede leer el valor de $f(x)$ en cada punto $P = (x, f(x))$ del gráfico como la altura de dicho punto, la cual será positiva si el mismo está ubicado por encima del eje x, o bien será negativa si el mismo está ubicado por debajo del eje x.

Ejemplo 11.1.4. Trazar los gráficos de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^3$
3. $f(x) = \sqrt{x}$

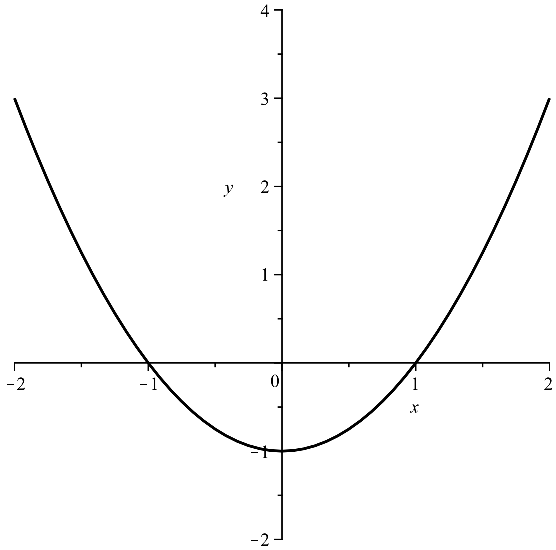
Solución:

1. Queremos realizar el gráfico de la función $f(x) = x^2$. Para ello procedemos a realizar una tabla de valores como la siguiente:

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
± 1	1
± 2	4
± 3	9

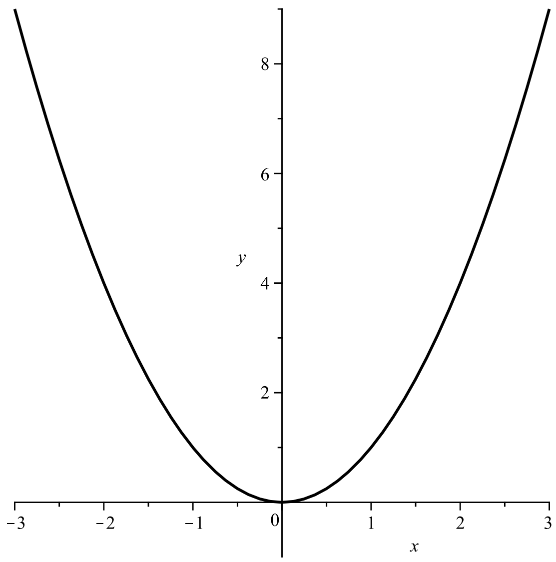
Si representamos los puntos anteriores en el plano y los unimos trazando una curva que pase por todos ellos, obtenemos el gráfico de la misma, tal como puede observarse en la Fig. 11.1.6.

Figura 11.1.5: Gráfico de una Función



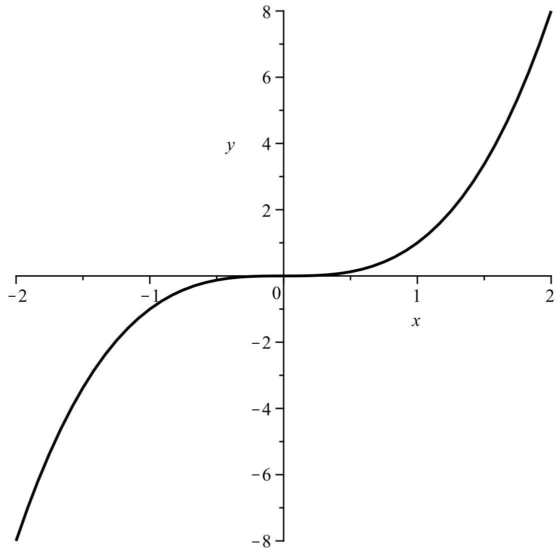
En la figura puede observarse el gráfico de la función $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$. Se puede leer el valor de $f(x)$ en cada punto $P = (x, f(x))$ del gráfico como la altura de dicho punto, la cual será positiva si el mismo está ubicado por encima del eje x, o bien será negativa si el mismo está ubicado por debajo del eje x.

Figura 11.1.6: Gráfico de la función $f(x) = x^2$



En la figura puede observarse el gráfico de la función $f(x) = x^2$, conforme la tabla de valores hecha en la solución del ejercicio correspondiente.

Figura 11.1.7: Gráfico de la función $f(x) = x^3$



En la figura puede observarse el gráfico de la función $f(x) = x^3$, conforme la tabla de valores hecha en la solución del ejercicio correspondiente.

2. Queremos realizar el gráfico de la función $f(x) = x^3$. Para ello procedemos a realizar una tabla de valores como la siguiente:

x	$f(x) = x^3$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
-1	-1
-2	-8

Si representamos los puntos anteriores en el plano y los unimos trazando una curva que pase por todos ellos, obtenemos el gráfico de la misma, tal como puede observarse en la Fig. 11.1.7.

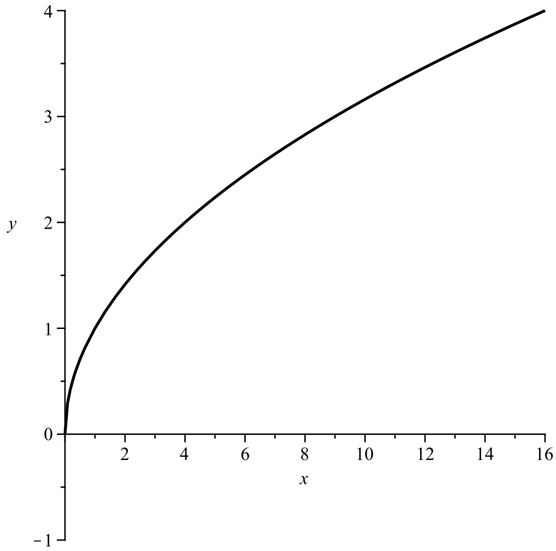
3. Queremos realizar el gráfico de la función $f(x) = \sqrt{x}$. Para ello procedemos a realizar una tabla de valores como la siguiente:

x	$f(x) = \sqrt{x}$
0	0
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	1
4	2
9	3
16	4

Si representamos los puntos anteriores en el plano y los unimos trazando una curva que pase por todos ellos, obtenemos el gráfico de la misma, tal como puede observarse en la Fig. 11.1.8.

El gráfico de una función ayuda a ilustrar el *dominio* y la *imagen* de la misma. El dominio puede ser deducido del rango de valores sobre el eje x donde se encuentra definida la función, mientras que la imagen

Figura 11.1.8: Gráfico de la función $f(x) = \sqrt{x}$



En la figura puede observarse el gráfico de la función $f(x) = \sqrt{x}$, conforme la tabla de valores hecha en la solución del ejercicio correspondiente.

consta del rango de posibles valores sobre el eje y que toma la misma. Por ejemplo, en la Fig. 11.1.5 situada en la pág. 200, el gráfico contenido en la misma nos muestra que:

$$\mathrm{Dom}(f) = [-2, 2] \qquad \mathrm{Im}(f) = [-1, 3]$$

Ejemplo 11.1.5. Si observamos el gráfico de la función:

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

— *ver* Fig. 11.1.9 — podemos deducir que:

$$\mathrm{Dom}(f) = [-2, 2] \qquad \mathrm{Im}(f) = [0, 2]$$

11.1.11. Aplicación de funciones a situaciones concretas

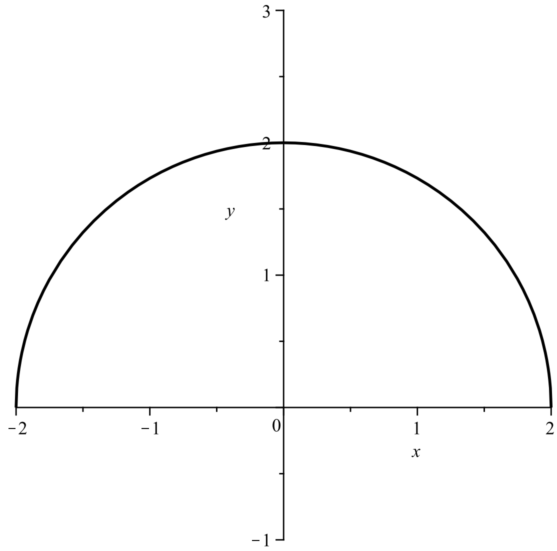
La familia López, que por mes recorre 3000 Km con el auto, se plantea la posibilidad de instalar un equipo de gas en el auto. Si la instalación del equipo cuesta \$1500, 1 litro de nafta cuesta \$0,69, 1m^3 de gas cuesta \$0,32 y con un litro de nafta o con 0,8m^3 de gas recorren 14 Km, obtener:

1. La función que mide el gasto en combustible en función del tiempo — *medido en meses a partir del hipotético momento de la conversión a gas* — si se usa nafta.
2. Igual al anterior, pero si se utiliza gas — *incluyendo el valor del equipo*.
3. El gráfico de ambas funciones en un mismo sistema de ejes.
4. El momento en que se amortiza la inversión de la instalación del equipo de gas — *utilizar el gráfico del punto anterior*.

Solución:

1. Determinemos la función de gasto si se utiliza nafta.

Figura 11.1.9: Gráfico de la función $f(x) = \sqrt{4-x^2}$



En la figura puede observarse el gráfico de la función $f(x) = \sqrt{4-x^2}$. Del mismo se desprende que $\mathrm{Dom}(f) = [-2, 2]$ e $\mathrm{Im}(f) = [0, 2]$.

Primero calculamos cuánto se gasta en un mes. Si cada 14 Km se consume 1 litro de nafta entonces para recorrer 3000 Km se gastarán:

$$\frac{3000}{14} = 214{,}29$$

litros, que costarán:

$$\$\,0{,}69 \cdot 214{,}29 = \$147{,}86$$

Como del problema se han eliminado todo otro tipo de gastos, en todos los meses gastará lo mismo y en t meses se gastará:

$$\$147{,}86t$$

Si llamamos $f_1(t)$ al gasto en que se incurre durante t meses si se utiliza nafta, tenemos que:

$$f_1(t) = 147{,}86t$$

Por ejemplo si transcurren 3 meses, entonces $t = 3$ y:

$$f_1(3) = 3 \cdot (147{,}86) = \$443{,}58$$

Si agregamos la hipótesis de que el automóvil está permanentemente en movimiento, se puede extender la función $f_1(t)$ a valores no enteros de t. Por ejemplo:

$$f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 147{,}86 = \$73{,}93$$

2. Determinemos la función de gasto si se utiliza gas.

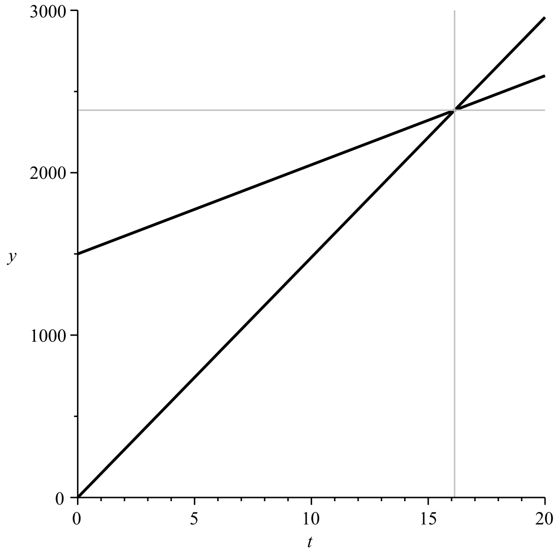
   El costo por la reconversión es de \$1500. Este valor es fijo, por única vez, y debe sumarse al gasto por consumo de gas que sí varía de acuerdo a los kilómetros recorridos — *o a los meses transcurridos*.

   Ahora bien, si con $0{,}8\mathrm{m}^3$ de gas se recorren 14Km, para recorrer 3000Km se consumirán:

$$\frac{3000 \cdot 0{,}8}{14} = 171{,}43\mathrm{m}^3$$

   de gas.

Figura 11.1.10: Amortización del gasto de Instalación



En la figura puede observarse el gráfico de las funciones $f_1(t) = 147{,}86t$ y $f_2(t) = 1500{+}54{,}86t$. El punto de intersección entre ambos gráficos representa el momento donde se amortiza el costo de la instalación del equipo de gas, debido al ahorro de consumo por el hecho de utilizar gas. Vemos que dicho momento se encuentra entre los 16 y 17 meses de tiempo t.

Luego, por mes se gastará $171{,}43 \cdot 0{,}32 = \$54{,}86$. En consecuencia en el primer mes se gastarán $1500 + 54{,}86$ pesos, y durante los primeros t meses se gastarán:

$$1500 + 54{,}86t$$

Si llamamos ahora $f_2(t)$ al gasto en que se incurre durante t meses si se usa gas, tenemos:

$$f_2(t) = 1500 + 54{,}86t$$

Si agregamos la hipótesis anterior sobre el consumo continuo entonces, por ejemplo, el gasto durante 3 meses y medio es:

$$f_2(3{,}5) = 1500 + 3{,}5 \cdot 54{,}86 = \$1692{,}01$$

3. El gráfico de ambas funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ puede apreciarse en la Fig. 11.1.10.

4. Realicemos a continuación el cálculo del momento en que se amortiza el equipo de gas.

   Las curvas se cortan entre $t = 14$ y $t = 18$. El valor de t para que esto ocurra, representa el momento en que los gastos para una y otra modalidad de consumo se equiparan. Para calcularlo, buscamos para qué valores de t es $f_1(t) = f_2(t)$.

   Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 147{,}86t &= 1500 + 54{,}86t \\ \Leftrightarrow t &= 16{,}129 \end{aligned}$$

   Luego, al cabo de 16.129 meses se habrá amortizado por completo el valor del equipo de gas.

Capítulo 12

Funciones Lineales

12.1. Teoría Básica

Definición 12.1.1. Llamaremos funciones lineales a las que se representan gráficamente mediante rectas. Su expresión analítica es de la siguiente forma:

$$f(x) = mx + b$$

donde m y b son números reales fijos. Denominaremos *pendiente* de la recta a la constante m y *ordenada al origen* a la constante b. La pendiente tiene que ver con la inclinación de la recta con respecto al eje x, mientras la ordenada al origen tiene que ver con la altura donde la recta corta al eje y.

Ejemplo 12.1.1. Ejemplos de funciones lineales son:

1. $f(x) = 2x + 1$ — *ver* Fig. 12.1.1.
2. $g(x) = -3x$— *ver* Fig. 12.1.2.
3. $h(x) = -4$— *ver* Fig. 12.1.3.
4. $l(x) = \frac{2}{3}x - 2$— *ver* Fig. 12.1.4.

Por lo tanto, como vimos en los gráficos anteriores, podemos decir que para la expresión de una función lineal — *ecuación de la recta* — es suficiente conocer el valor de la función en dos puntos distintos.

12.1.1. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Llamemos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$, donde $x_1 \neq x_2$. Nos proponemos determinar la ecuación de la recta:

$$y = mx + b$$

que pasa por los puntos anteriores. Para lograr esto último debemos hallar los valores de m y b. Que la recta pase por los puntos P y Q nos dice que:

$$y_1 = mx_1 + b$$
$$y_2 = mx_2 + b$$

donde x_1, y_1, x_2 e y_2 son datos. Debemos resolver pues el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y_1 &= mx_1 + b \\ y_2 &= mx_2 + b \end{cases}$$

A tales efectos podemos restar la segunda ecuación con la primera y despejar m:

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Figura 12.1.1: Función lineal $f(x) = 2x + 1$

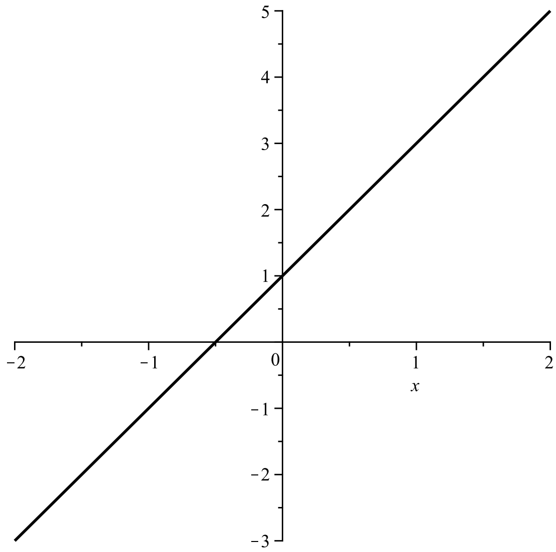


Figura 12.1.2: Función lineal $g(x) = -3x$

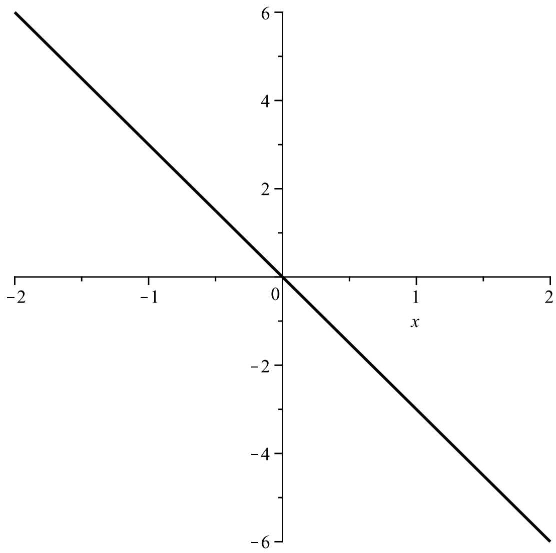


Figura 12.1.3: Función lineal $h(x) = -4$

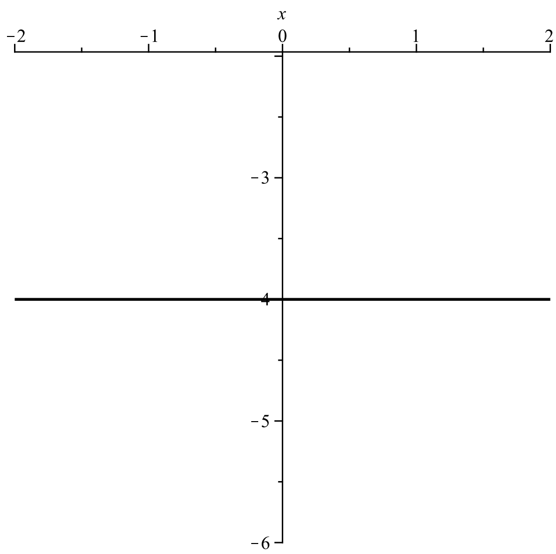
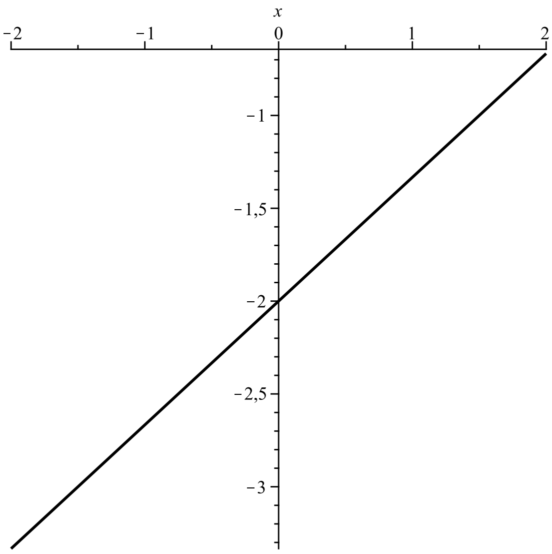


Figura 12.1.4: Función lineal $l(x) = \frac{2}{3}x - 2$



Luego: El valor de la pendiente m puede ser obtenido mediante la fórmula:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

En cuanto al valor de b, una vez obtenido m podemos despejarlo de la primera ecuación como sigue:

$$\boxed{b = y_1 - mx_1}$$

Por lo tanto, reemplazando m y b en la ecuación de la recta nos queda de la siguiente forma:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Ejemplo 12.1.2. Sabiendo que una función lineal f satisface que $f(3) = 0$ y $f(-1) = -\frac{8}{3}$, hallar $f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución:

Como f es una función lineal sabemos que es de la forma:

$$f(x) = mx + b$$

Tenemos pues que determinar a partir de los datos que nos han dado, el valor de m y el valor de b. Entonces razonamos como sigue, como $f(3) = 0$, eso significa que al reemplazar x por 3 en la ecuación de $f(x)$, el valor obtenido será $y = 0$. Esto es:

$$0 = f(3) = m \cdot 3 + b$$

Razonando de manera análoga, como $f(-1) = -\frac{8}{3}$, entonces:

$$-\frac{8}{3} = f(-1) = m \cdot (-1) + b$$

Las dos ecuaciones que obtuvimos alcanzan para hallar nuestras dos incógnitas m y b:

$$\begin{cases} 3m + b & = 0 \\ -m + b & = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

Una forma sencilla de resolver este sistema es restar la segunda ecuación con la primera, para despejar m, obteniendo:

$$4m = \frac{8}{3} \Rightarrow \boxed{m = \frac{2}{3}}$$

Para obtener b reemplazamos el valor de m en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{2}{3} + b &= 0 \\ \Rightarrow b &= -2 \end{aligned}$$

Encontramos pues:

$$m = \frac{2}{3} \qquad\qquad b = -2$$

y por lo tanto, la función lineal buscada es:

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{3}x - 2}$$

12.1.2. Pendiente m

Hay una propiedad general de las funciones lineales que se expresa diciendo que: la variación relativa de una función lineal es constante. Analíticamente quiere decir que si $f(x) = mx + b$ es una función lineal cualquiera, entonces el cociente:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

permanece constante para cualquier par de valores $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

En efecto:

$$f(x_2) - f(x_1) = mx_2 + b - mx_1 - b = m(x_2 - x_1)$$

de donde:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m$$

Por lo tanto, al coeficiente m se lo llama pendiente de la recta y mide la variación relativa de f.

12.1.3. Signo de la pendiente

La pendiente m no sólo sirve para medir la variación relativa de f, sino que su signo nos da información directa sobre el crecimiento o decrecimiento de f. En efecto, observamos una vez más la fórmula analítica:

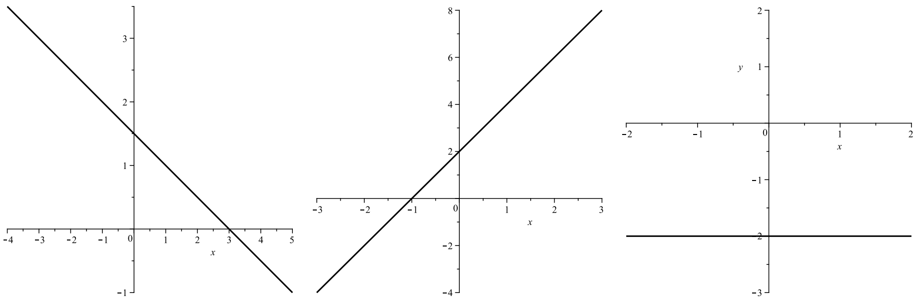
$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Si suponemos que $x_1 < x_2$, entonces $x_2 - x_1 > 0$, de modo que el denominador de la fracción mediante la cual se recupera la pendiente m sería positivo. Pero entonces el signo de m coincide con el signo de $f(x_2) - f(x_1)$. De esta manera:

- Si $f(x_2) - f(x_1) < 0$ entonces $f(x_2) < f(x_1)$ y entonces la recta $y = f(x)$ es decreciente.
- Si $f(x_2) - f(x_1) > 0$ entonces $f(x_2) > f(x_1)$ y entonces la recta $y = f(x)$ es creciente.
- Si $f(x_2) - f(x_1) = 0$ entonces $f(x_2) = f(x_1)$ y entonces la recta $y = f(x)$ es constante.

Ejemplo 12.1.3. A partir de los siguientes gráficos escribir la función lineal correspondiente a cada recta — *ver* FIG. 12.1.5.

Figura 12.1.5: Gráfico de tres funciones lineales



En la figura pueden observarse los gráficos de tres funciones lineales, cuyas fórmulas debe el lector recuperar a partir de los mismos.

1. $f(x)$ es la función lineal correspondiente al gráfico del lado izquierdo de la Fig. 12.1.5.
2. $f(x)$ es la función lineal correspondiente al gráfico central de la Fig. 12.1.5.
3. $f(x)$ es la función lineal correspondiente al gráfico del lado derecho de la Fig. 12.1.5.

Solución:

1. Como siempre, buscamos una función lineal:

$$f(x) = mx + b$$

Debemos encontrar, por medio de los datos que aporta el gráfico, los valores de m y b. Se observa que la recta pasa por el punto $P = (1, 1)$ y por el punto $Q = (3, 0)$, siendo éste último el punto donde la recta corta al eje x. Ya que tenemos dos puntos por donde pasa el gráfico de f procedemos como en el ejemplo anterior:

Que pase por el $(1, 1)$ significa que $f(1) = 1$, entonces:

$$m \cdot 1 + b = 1$$

Que pase por el $(3, 0)$ significa que $f(3) = 0$, entonces:

$$m \cdot 3 + b = 0$$

Restando la primer ecuación a la segunda obtenemos:

$$2m = -1 \Rightarrow \boxed{m = -\frac{1}{2}}$$

Ahora podemos despejar b de la primera ecuación:

$$-\frac{1}{2} + b = 1 \Rightarrow \boxed{b = \frac{3}{2}}$$

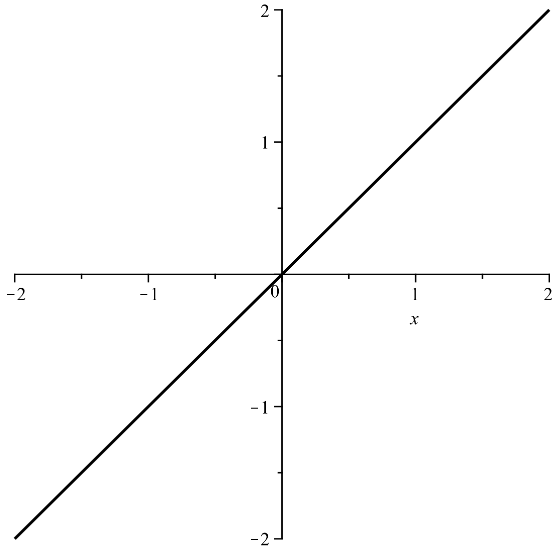
En consecuencia, la función lineal correspondiente a la recta del gráfico izquierdo es:

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$$

Podemos comprobar fácilmente que los puntos $P = (1, 1)$ y $Q = (3, 0)$ pertenecen a la recta:

$$f(1) = -\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{2} = 1$$
$$f(3) = -\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{3}{2} = 0$$

Figura 12.1.6: GRÁFICO DE LA FUNCIÓN IDENTIDAD $f(x) = x$



En la figura pueden observarse el gráfico de la función identidad $f(x) = x$. La misma es la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

2. En este caso observamos que la recta corta al eje x en -1, con lo cual el punto $(-1, 0)$ pertenece a la recta. La misma corta al eje y en 2, con lo cual el punto $(0, 2)$ pertenece a ella. Procedemos pues como en el ítem anterior:

   Que pase por el punto $(-1, 0)$ significa que $f(-1) = 0$, pero entonces:

   $$m \cdot (-1) + b = 0$$

   Que pase por el punto $(0, 2)$ significa que $f(0) = 2$, pero entonces:

   $$m \cdot 0 + b = 2$$

   De la segunda ecuación se obtiene $b = 2$. Reemplazando en la primera ecuación, despejamos m:

   $$-m + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 2}$$

   Luego: La función lineal en este caso es:

   $$\boxed{f(x) = 2x + 2}$$

3. Aquí observamos que la recta es horizontal. Más precisamente, los puntos de la recta tienen siempre segunda coordenada igual a -2. Es decir, son todos de la forma $(x, -2)$, con x cualquiera. En este caso no vale la pena hacer la cuenta, ya que se advierte que la función lineal buscada es:

   $$\boxed{f(x) = -2}$$

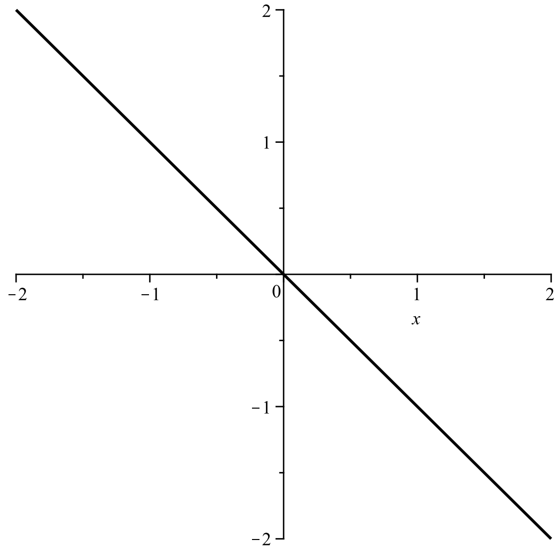
12.1.4. Dos rectas importantes

Hay dos rectas que merecen ser mencionadas:

1. Cuando $f(x) = x$, su gráfico es la bisectriz del primer y tercer cuadrante. A esta recta se la suele llamar *función identidad*, porque el valor de $f(x) = x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. El gráfico de la misma puede ser consultado en la FIG. 12.1.6.

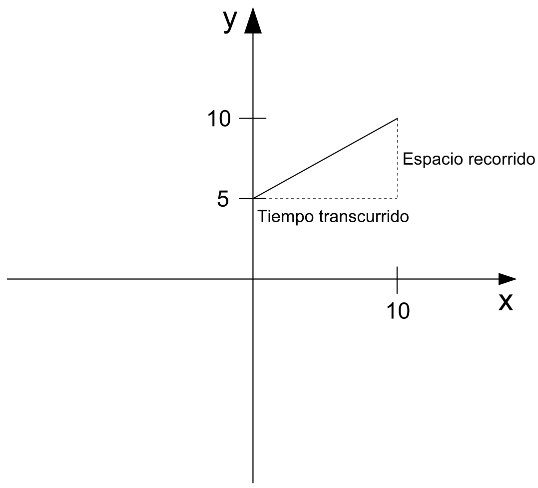
2. Cuando $f(x) = -x$, su gráfico es la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante. El gráfico de la misma puede ser consultado en la FIG. 12.1.7.

Figura 12.1.7: Gráfico de la Función $f(x) = -x$



En la figura pueden observarse el gráfico de la función $f(x) = -x$. La misma es la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante.

Figura 12.1.8: Espacio recorrido vs. Tiempo



El gráfico corresponde al espacio recorrido por un móvil que se desplaza con movimiento uniforme.

12.1.5. Aplicación de funciones lineales a situaciones reales

Ejemplo 12.1.4. El gráfico que se muestra a continuación corresponde al espacio recorrido por un móvil que se desplaza con movimiento uniforme. Por lo tanto, podemos calcular su variación relativa e interpretar su significado — *ver* Fig. 12.1.8.

Solución:

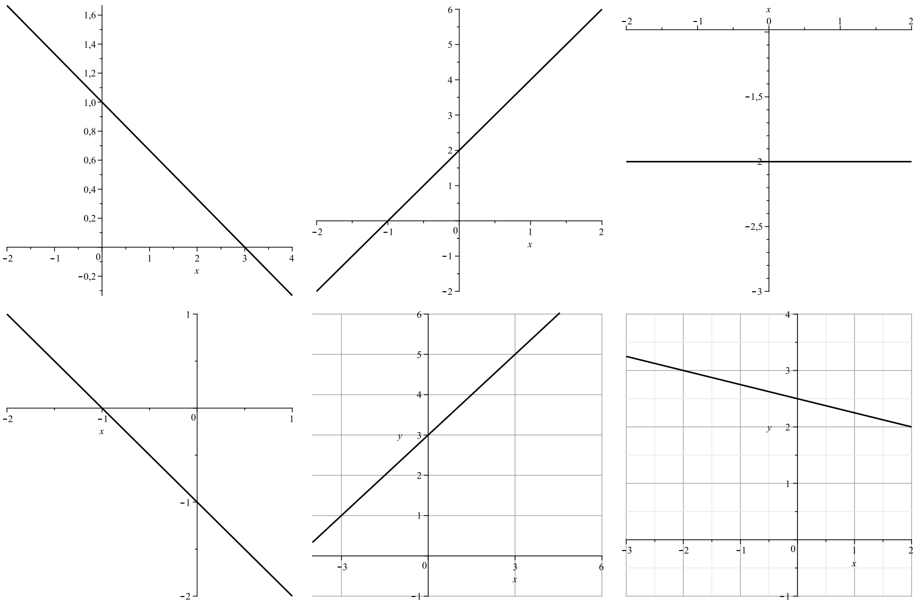
Llamamos $f(t)$ al espacio recorrido en t segundos por el móvil. En el gráfico vemos que cuando t aumenta 10 el espacio recorrido por el móvil es 5. Entonces inferimos que m es el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo transcurrido. Es decir:

$$m = \frac{f(10) - f(0)}{10 - 0} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

La pendiente $\frac{1}{2}$ nos da la velocidad del móvil. Teniendo en cuenta que $f(0) = 5$, entonces es fácil calcular $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{2}t + 5$$

Figura 12.2.1: Ejercicio 1



En la figura pueden observarse los gráficos de seis funciones lineales, cuyas fórmulas debe el lector recuperar a partir de los mismos.

12.2. Ejercicios

1. A partir de los gráficos contenidos en la Fig. 12.2.1, escribir la función lineal correspondiente a cada recta.

2. Representar gráficamente las siguientes rectas, sin utilizar tabla de valores:

   a)
   $$y = \frac{1}{2}x - 4$$

   b)
   $$y = -\frac{1}{3}x + 5$$

   c)
   $$y = 4x - \frac{3}{2}$$

   d)
   $$y = 3$$

   e)
   $$y = -\frac{1}{2}x$$

3. Hallar las ecuaciones de las rectas que satisfacen las condiciones indicadas en cada caso. Representarlas gráficamente:

   a) Pendiente 3, y ordenada al origen 2.
   b) Pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(4, 1)$.
   c) Pasa por los puntos $(-5, 4)$ y $(-5, 3)$.
   d) Pasa por los puntos $(0, -1)$ y $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
   e) Es perpendicular a la recta $x = 2$ y pasa por el punto $(2, 3)$.
   f) Es paralela al eje x y pasa por el punto $(1, 5)$.
   g) La ecuación de la recta cuya abscisa y ordenada al origen son respectivamente 5 y -1.

4. Complete las siguientes tablas con sus valores correspondientes.

 a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

x	$f(x)$
-1	
0	
1	
2	
3	

 b) $f(x) = \frac{x-4}{3}$

x	$f(x)$
-2	
0	
1	
2	
4	

 c) $f(x) = 2(x-7)$

x	$f(x)$
-1	
0	
2	
4	
7	

 d) $f(x) = -2x + 1$

x	$f(x)$
-3	
-2	
0	
1	
3	

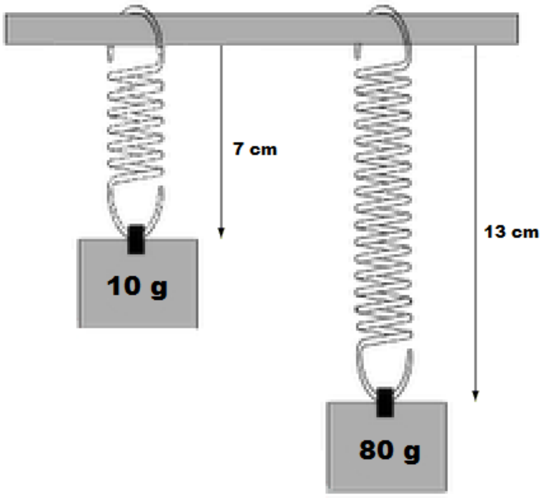
5. Trace el gráfico de la función construyendo primero una tabla de valores:

 a) $f(x) = 2x - 4$
 b) $f(x) = 6 - 3x$
 c) $f(x) = x - 1$
 d) $f(x) = 2(x+1)$
 e) $f(x) = 2(-3x+2)$
 f) $f(x) = -4x + 2$
 g) $f(x) = -3x - 9$

6.

 a) Indique cuáles de las siguientes rectas cortan al eje de las ordenadas en el mismo punto que $y = 3x + 2$
 b) ¿Cuáles son paralelas a ellas?
  1) $y = 3x - \frac{1}{3}$

Figura 12.2.2: Resorte con una masa Suspendida



Cuando suspendemos de un resorte una masa de 10 gramos, la longitud del mismo es de 7 cm. Si suspendemos una masa de 80 gramos, su longitud es de 13 cm.

2) $y = 8\left(x + \frac{1}{4}\right)$
3) $y = 3\,(x + 2)$
4) $y = 7x + 2$
5) $y = 4x + 2$
6) $y = 3x + 4$

7.

a) Halle la ecuación de la recta que tiene pendiente 5 y pasa por el punto $(-1, -2)$.
b) Halle la ecuación de la recta que tiene pendiente $-\frac{1}{2}$ y pasa por el punto $(-4, 7)$.
c) Halle la ecuación de la recta que tiene pendiente $\frac{1}{4}$ y pasa por el punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{5}\right)$.

8. Dada la recta $y = \frac{1}{5}x + 3$, halle las funciones lineales que verifican:

a) Ser paralela a la misma y de ordenada al origen igual a la de la recta $2x + y = 8$.
b) Ser perpendicular a la misma y de ordenada al origen -2.
c) Ser paralela a la misma y que pasa por el punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.
d) Ser perpendicular a la misma y que pase por el origen.

9. Aplicaciones a situaciones reales.

a) Ver la Fig. 12.2.2. Llamamos $L\,(p)$ a la función lineal que relaciona la longitud con el peso:

$$L\,(p) = mp + b$$

1) Halle el valor de m y el valor de b.
2) Halle la longitud del resorte cuando no colocamos ningún peso, es decir si $p = 0$.
3) Se sabe que el resorte empieza a deformarse cuando se alarga cinco veces su longitud inicial. Halle el valor del peso p que hace que el resorte comience a deformarse.

b) Un depósito se vacía mediante una bomba de agua. El volumen de agua que queda — *en* m^3 — en función del tiempo transcurrido — *en segundos* — viene dado por:

$$V\,(t) = 8 - \frac{1}{2}t$$

1) ¿Cuántos metros cúbicos de agua había al poner en funcionamiento la bomba?
2) ¿Cuál será el volumen en función del tiempo si el depósito se vacía con una bomba cuatro veces más potente que la original?

c) Las personas que ganan menos de \$5000 deben pagar, en concepto de impuestos, una tercera parte de lo que ganan por encima de los \$2000.

1) Determine la función de pagos.
2) Represente gráficamente la función de pagos.

d) Un barril vacío con capacidad para 20 litros pesa 2,5Kg.

1) Representar la función peso total del barril en función de la cantidad de agua — *en litros* — que contiene. Hallar su fórmula. ¿Cuál es el dominio de dicha función?
2) Si disponemos de 3 litros de mercurio, cuyo peso total es 40,8Kg, resolver el problema anterior reemplazando agua por mercurio.

e) Una empresa de transportes establece sus tarifas de este modo: \$0,10 por Km recorrido y \$5 por paquete o maleta. ¿Cuánto costará trasladarse con una maleta a 100Km? ¿Y a 200Km?

1) Complete la siguiente tabla considerando que se lleva una maleta:

Distancia en Km:	100	150	200	250	300
Precio en pesos:					

2) Expese la fórmula de la función que relaciona el número de Km y el precio del traslado.
3) Analice la misma situación pero trasladándose con dos maletas.
4) Represente en un mismo gráfico las dos situaciones — *viajar con una maleta, viajar con dos maletas* — e interprete.
5) Otras empresas de la competencia tienen las siguientes tarifas:

	Precio por Km	Precio por maleta	Ecuación sin maletas	Ecuación con 1 maleta
Empresa A	0,05	\$10		
Empresa B	0,075	\$7,5		

Represente gráficamente y decida qué empresa contrataría para gastar lo menos posible.

f) En las 10 primeras semanas de cultivo de una planta, que medía 2cm, se ha observado que su crecimiento es directamente proporcional al tiempo, viendo que en la primera semana ha pasado a medir 2,5 cm.

1) Establezca una función con la finalidad de dar la altura de la planta en función del tiempo y represente dicha función gráficamente.

g) Por el alquiler de un coche cobran \$100 diarios más \$0,30 por kilómetro. Encuentre la función de la recta que relaciona el costo diario con el número de kilómetros y representarla. Si en un día se ha hecho un total de 300Km, ¿Qué importe deberíamos abonar?

12.3. Teoría Complementaria

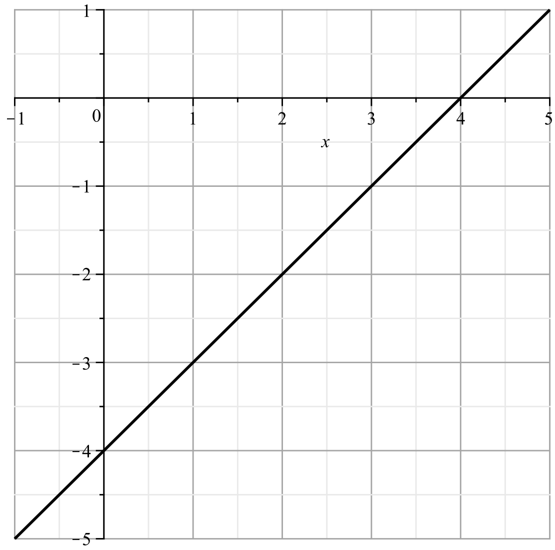
Toda función de la forma $y = f(x) = mx + b$ con $m \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ recibe la denominación de *función lineal*.

Son ejemplos de funciones lineales:

$$y = 2x$$
$$y = x - 4$$
$$y = \frac{1}{2}x + 2$$
$$y = 2$$

En esta forma x representa la variable independiente e y es la variable dependiente.

Figura 12.3.1: PENDIENTE DE UNA FUNCIÓN LINEAL



Como puede apreciarse en la figura, la pendiente de la recta $y = x - 4$ es $m = 1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2}$. Esto significa que cuando las abscisas aumentan una unidad, las ordenadas aumentan también una unidad. O bien si las abscisas aumentan dos unidades, las ordenadas también aumentarán dos unidades.

Definición 12.3.1. Denominamos *pendiente* a la constante m y *ordenada al origen* a la constante b. El dominio de la función lineal f es todo el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales.

Nota: El gráfico de una función lineal es siempre una recta que no puede ser paralela al eje y. Es decir toda recta vertical no será considerada función lineal.

12.3.1. Pendiente de una recta

Ejemplo 12.3.1. Consideremos la recta:

$$y = x - 4$$

la cual tiene pendiente:

$$m = 1 = \frac{1}{1}$$

Cuando la abscisa aumenta una unidad, la ordenada también aumenta una unidad — *ver* FIG. 12.3.1.

Cuando la abscisa aumenta dos unidades, la ordenada aumenta también dos unidades. Observemos que los cocientes entre la variación de la ordenada y la variación de la abscisa son constantes e iguales al valor de la pendiente:

$$m = 1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \cdots$$

Ejemplo 12.3.2. Consideremos ahora la recta:

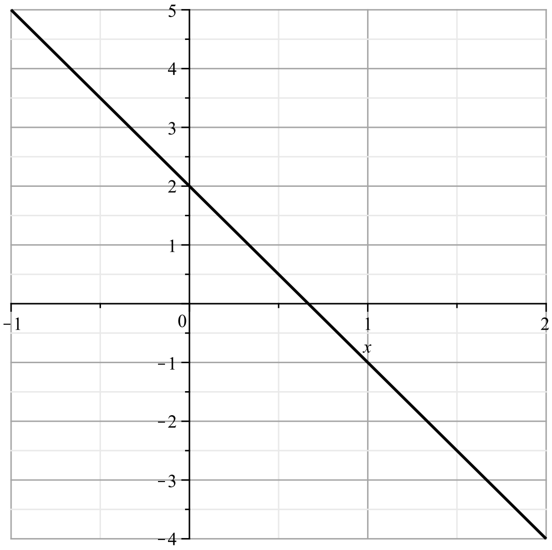
$$y = -3x + 2$$

la cual tiene pendiente:

$$m = -3 = -\frac{3}{1}$$

Cuando la abscisa aumenta una unidad, la ordenada disminuye tres unidades. O bien cuando la abscisa aumenta dos unidades, la ordenada disminuye seis unidades — *ver* FIG. 12.3.2. Es decir nuevamente observamos que los cocientes entre la variación de la ordenada y la variación de la abscisa son constantes e iguales al valor de la pendiente:

Figura 12.3.2: PENDIENTE DE UNA FUNCIÓN LINEAL



Como puede apreciarse en la figura, la pendiente de la recta $y = -3x + 2$ es $m = -3 = -\frac{3}{1} = -\frac{6}{2}$. Esto significa que cuando las abscisas aumentan una unidad, las ordenadas aumentan también una unidad. O bien que cuando las abscisas aumentan seis unidades, entonces las ordenadas disminuirán seis unidades.

$$m = -3 = -\frac{3}{1} = -\frac{6}{2} = -\frac{9}{3} = \cdots$$

Ejemplo 12.3.3. Consideremos ahora la recta:

$$y = 2$$

cuya pendiente es:

$$m = 0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \cdots$$

Cuando la abscisa aumenta una unidad, la ordenada no aumenta ni disminuye. Lo mismo ocurre cuando la abscisa aumenta 2, 3 o más unidades. En este ejemplo resulta que los cocientes entre la variación de la ordenada y la variación de la abscisa son constantes e iguales a cero, el valor de la pendiente m — *ver* FIG. 12.3.3.

12.3.2. Significado de la pendiente m

En el siguiente cuadro se clasifican las funciones lineales $y = mx + b$ según el valor de la pendiente sea positivo, negativo o cero — *ver* FIG. 12.3.4.

La pendiente está determinada por el cociente entre la variación de y y la variación de x. La pendiente m mide la inclinación de la recta respecto del eje x. Podemos hallar entonces, a partir de la pendiente, el ángulo α que forma dicha recta con el eje x, teniendo en cuenta que:

$$m = \tan(\alpha)$$

El ángulo de inclinación α, se mide en sentido contrario a las agujas del reloj, a partir de la dirección positiva del eje x.

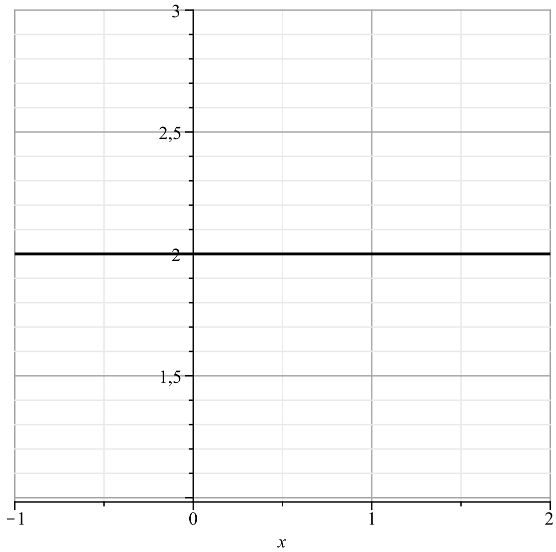
Ejemplo 12.3.4. Por ejemplo, si:

$$y = x - 4$$

entonces $m = 1$ y por lo tanto:

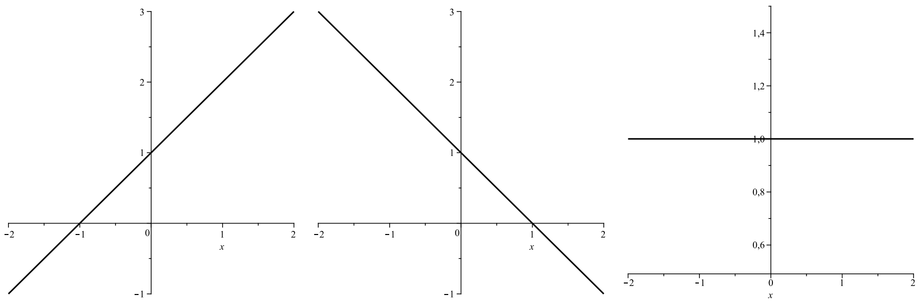
$$\tan(\alpha) = m = 1 \Leftrightarrow \alpha = \arctan(1) = 45°$$

Figura 12.3.3: Pendiente de una Función Lineal



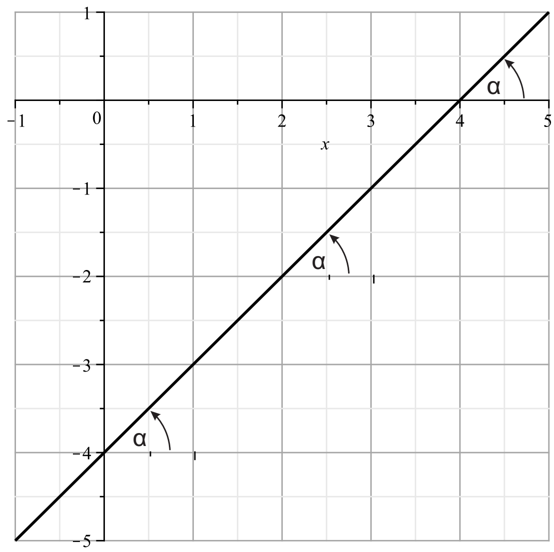
Cuando la abscisa aumenta una unidad, la ordenada no aumenta ni disminuye. Lo mismo ocurre cuando la abscisa aumenta 2, 3 o más unidades.

Figura 12.3.4: Pendiente de una Función Lineal



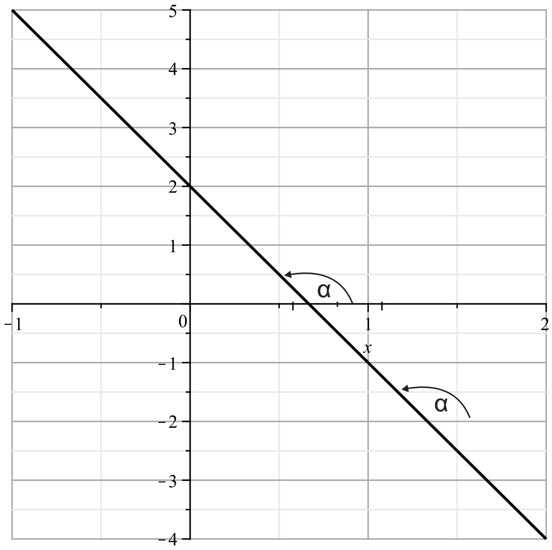
Si la pendiente es $m > 0$, entonces la recta será creciente — *ver Fig. iza*. Si la pendiente es $m < 0$, la recta será decreciente — *ver Fig. central*. Si la pendiente es $m = 0$, la recta será constante — *ver Fig. derecha*.

Figura 12.3.5: Ángulo que forma con el eje x



En la figura puede apreciarse el gráfico de la recta $y = x - 4$. Como la misma tiene pendiente $m = 1$, entonces el ángulo α que forma con el eje x es $\alpha = \arctan(1) = 45°$.

Figura 12.3.6: Ángulo que forma con el eje x



En la figura puede apreciarse el gráfico de la recta $y = -3x + 2$. Como la misma tiene pendiente $m = -3$, entonces el ángulo α que forma con el eje x es $\alpha = \arctan(-3) \approx 108°26'5{,}82''$.

Luego: El ángulo que forma la recta $y = x - 4$ con el eje x es $\alpha = 45°$ — *ver* Fig. 12.3.5.

Ejemplo 12.3.5. Consideremos ahora la recta $y = -3x + 2$. Como $\tan(\alpha) = m = -3$, entonces podemos despejar α como:

$$\alpha = \arctan(-3) \approx 108°26'5{,}82''$$

— *ver* Fig. 12.3.6.

Ejemplo 12.3.6. Por último, si la recta en cuestión fuera constante, como por ejemplo $y = 2$, entonces al ser una recta horizontal es claro que el ángulo que forma con el eje x debe ser $\alpha = 0°$. Pero esto último no contradice la fórmula del ángulo $\alpha = \arctan(m)$, pues al ser $m = 0$:

$$\alpha = \arctan(0) = 0°$$

12.3.3. Función de proporcionalidad directa

La ordenada al origen b es el punto de intersección entre la recta y el eje y, es decir, es el valor de la ordenada cuando $x = 0$, o sea el valor de $f(0)$. Si la ordenada al origen es $b = 0$, entonces:

$$y = mx$$

y por lo tanto la recta pasa por el origen de coordenadas — *ver* Fig. 12.3.7.

Este caso particular se llama *función de proporcionalidad directa* y su gráfico es una recta que pasa por el origen de coordenadas. Estas funciones están caracterizadas por el hecho de que los puntos (x, y) del gráfico verifican:

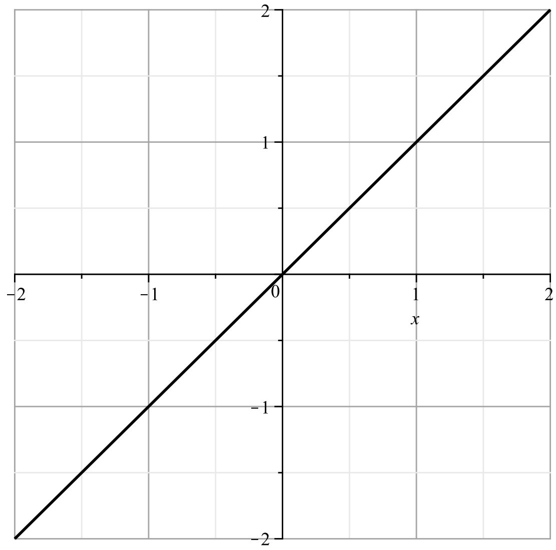
$$m = \frac{y}{x}$$

Observemos la función $y = 2x$, donde la relación entre los valores de la variable x y los valores de la variable y sería:

$$\frac{y}{x} = 2$$

Es decir, los valores de y son siempre el doble de los valores de x. Esto último quiere decir que hay una constante de proporcionalidad que relaciona los valores de x con los valores de y, y precisamente esa constante

Figura 12.3.7: Recta que pasa por el origen



En la figura puede apreciarse el gráfico de una recta que pasa por el origen. En dicha recta la ordenada al origen será $b = 0$ y por lo tanto la ecuación de la misma será de la forma $y = mx$.

de proporcionalidad es la pendiente de la recta, es decir: m, que en este caso es $m = 2$. Analicemos la siguiente tabla para entender mejor de qué se trata esto:

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow y \\ 1 &\longrightarrow 2 \\ 2 &\longrightarrow 4 \\ 3 &\longrightarrow 6 \end{aligned}$$

Si efectuamos en cada fila el cociente $\frac{y}{x}$, obtenemos siempre la misma constante $\frac{y}{x} = m = 2$:

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \cdots$$

En este caso los cocientes entre la variación de la ordenada y la variación de la abscisa nos dan nuevamente el valor de la pendiente.

Conclusión: Una recta de la forma $y = mx$ define una función de proporcionalidad directa. La pendiente de dicha función se denomina *constante de proporcionalidad*, y relaciona los valores de x con los valores de y mediante la siguiente igualdad:

$$\boxed{y = mx}$$

12.3.4. Función de proporcionalidad inversa

Definición 12.3.2. Las funciones de proporcionalidad inversa son aquellas en que la asignación se realiza mediante:

$$f(x) = \frac{m}{x}$$

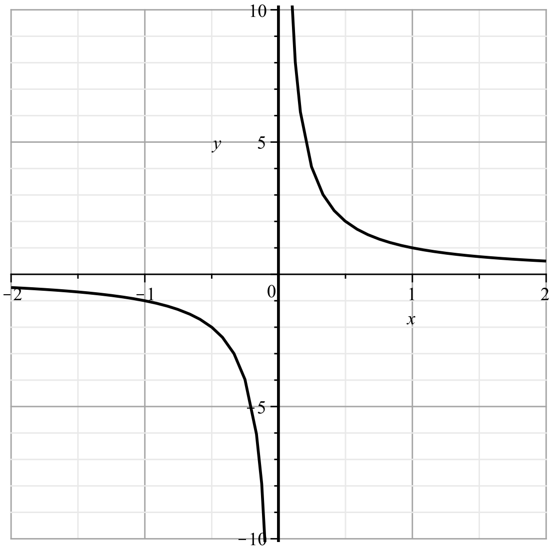
con $x \neq 0$, donde m es un número real distinto de cero y recibe el nombre de *constante de proporcionalidad inversa*.

La curva que se obtiene al representar gráficamente una función de proporcionalidad inversa es una *hipérbola equilátera* — *ver* Fig. 12.3.8.

Estas funciones están caracterizadas por el hecho de que los puntos (x, y) del gráfico verifican la ecuación:

$$x \cdot y = m$$

Figura 12.3.8: FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA



La figura muestra la curva que se obtiene al representar gráficamente una función de proporcionalidad inversa de la forma $y = \frac{m}{x}$, la cual recibe el nombre de *hipérbola equilátera.*

Observe que en las funciones de proporcionalidad inversa al duplicarse el valor de x, su imagen queda reducida a la mitad. Si se triplicara el valor de x, el valor de su imagen y quedaría reducido a la tercera parte, y así sucesivamente.

12.3.5. Ecuación de la recta

Definición 12.3.3. Para $m, b \in \mathbb{R}$ constantes, podemos interpretar una función lineal $y = mx + b$ como una ecuación lineal con dos incógnitas x e y que denominaremos *ecuación de la recta*.

12.3.6. Forma explícita de la ecuación de una recta

A la expresión $y = mx + b$, donde m y $b \in \mathbb{R}$ son constantes, la denominaremos *forma explícita* de la ecuación de la recta. Por ejemplo:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} \tag{12.3.1}$$

12.3.7. Forma implícita de la ecuación de la recta

Diremos que para $a, b, c \in \mathbb{R}$ constantes, la ecuación:

$$ax + by + c = 0$$

es la forma implícita de la recta[1]. Por ejemplo:

$$2x - 3y + 8 = 0$$

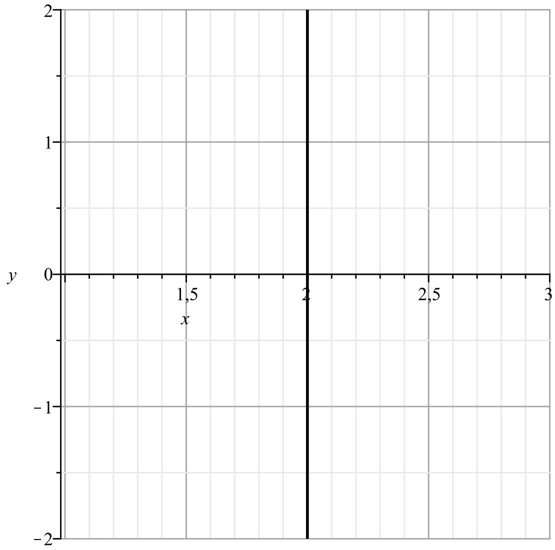
es la misma recta que la dada en (12.3.1). Observemos que si $b = 0$ y $a \neq 0$ la ecuación implícita de la recta se reduce a:

$$ax + c = 0$$

que representa a la recta paralela al eje y:

$$x = -\frac{c}{a}$$

Figura 12.3.9: Forma explícita de una recta vertical



La figura muestra la recta vertical cuya ecuación implícita es $x = 2$. La misma no es una función pues no cumple con la definición de función, en la cual a un valor de x le debe corresponder un único valor de y, en tanto que en este caso para $x = 2$ hay infinitos valores de y.

la cual, como vimos anteriormente no representa una función $y = f(x)$ — *ver* Fig. 12.3.9.

Si tenemos como datos dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) pertenecientes a una recta, podemos construir la ecuación de la misma, observando que:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

razón por la cual la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos será:

$$\boxed{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0}}$$

12.3.8. Rectas paralelas y perpendiculares

Sean f_1 y f_2 dos rectas de pendientes m_1 y m_2 respectivamente. Entonces diremos que:

- f_1 es paralela a f_2 — *en símbolos* $f_1 \parallel f_2$ — si y sólo si $m_1 = m_2$.
- f_1 es perpendicular a f_2 — *en símbolos* $f_1 \perp f_2$ — si y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Si dos rectas son paralelas, tienen la misma inclinación, por lo tanto sus pendientes son iguales. Es decir si:

$$f_1(x) = m_1 x + b_1$$
$$f_2(x) = m_2 x + b_2$$

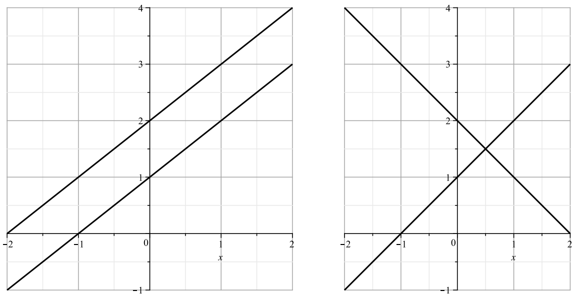
entonces $f_1 \parallel f_2$ si y sólo si $m_1 = m_2$.

Si dos rectas son perpendiculares, el producto de sus pendientes será -1. Es decir si:

$$f_1(x) = m_1 x + b_1$$
$$f_2(x) = m_2 x + b_2$$

entonces $f_1 \perp f_2$ si y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Figura 12.3.10: Rectas paralelas y perpendiculares



En la figura de la izquierda pueden apreciarse dos rectas paralelas, donde sus pendientes m_1 y m_2 son iguales, es decir $m_1 = m_2$. En la figura de la derecha pueden apreciarse dos rectas perpendiculares, donde sus pendientes m_1 y m_2 verifican la ecuación $m_1 \cdot m_2 = -1$.

En la Fig. 12.3.10 pueden apreciarse en un mismo gráfico dos rectas paralelas y en otro gráfico dos rectas perpendiculares.

Lo expresado anteriormente también afirma que si el producto de las pendientes es igual a -1, las rectas necesariamente deben ser perpendiculares, a excepción del caso en que las rectas sean horizontales y verticales.

Ejemplo 12.3.7. Determinar si los siguientes pares de rectas corresponden a rectas paralelas o perpendiculares o a ninguna de de las dos.

1. $3x - y + 2 = 0$ y $x + 3y - 1 = 0$

   La primera recta es de ecuación:
   $$y = 3x + 2$$
   de donde su pendiente es $m_1 = 3$.

   La segunda recta es de ecuación:
   $$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$
   de donde su pendiente es $m_2 = -\frac{1}{3}$. Si efectuamos el producto:
   $$m_1 \cdot m_2 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$$
   y en consecuencia las rectas resultan ser perpendiculares.

2. $6x - 2y - 5 = 0$ y $3x - y - 2 = 0$

   En este caso la primera recta es de ecuación:
   $$y = 3x - \frac{5}{2}$$
   de donde su pendiente es $m_1 = 3$.

   La segunda recta es de ecuación:
   $$y = 3x - 2$$
   de donde su pendiente es también $m_2 = 3$.

   Concluimos pues que las rectas son paralelas.

[1]No confundir las letras a y b utilizadas como coeficientes de x e y en la forma implícita de la recta con la abscisa y ordenada al origen de una recta, donde se utilizan las mismas letras.

12.3.9. Aplicaciones a situaciones reales

La función lineal corresponde a nuestra idea de proporcionalidad. Hay muchos fenómenos que responden a — *o se pueden aproximar por* — un modelo de proporcionalidad lineal.

Veamos algunos ejemplos concretos:

- El alargamiento de un resorte es proporcional al peso que colgamos de él:

$$A(p) = k \cdot p$$

donde:

$$\begin{cases} A(p) & : \text{ alargamiento.} \\ p & : \text{ peso.} \\ k & : \text{ factor de proporcionalidad.} \end{cases}$$

- Si se tiene en cuenta la longitud inicial L_0 del resorte, su longitud final será:

$$L(p) = L_0 + kp$$

donde:

$$\begin{cases} L(p) & : \text{ longitud final.} \\ L_0 & : \text{ longitud inicial.} \end{cases}$$

- El dinero que gana en concepto de intereses un inversor es proporcional al capital C que deposita:

$$I(C) = k \cdot C$$

donde:

$$\begin{cases} I(C) & : \text{ interés.} \\ C & : \text{ capital.} \\ k & : \text{ factor de proporcionalidad.} \end{cases}$$

— *el factor k de proporcionalidad representa la tasa de interés que paga el banco.*

Ejemplo 12.3.8. Un granjero quiere vender su producción de naranjas y considera dos alternativas:

1. Venderla a la cooperativa local que paga 0,5 pesos el kilo libre de impuestos y absorbe toda la producción. Los gastos fijos por flete son de \$100.
2. Alquilar un puesto en el mercado central donde puede venderlas a \$1 el kilo. Se estima que el 10 % de la producción no se venderá. La tasa impositiva asciende al 20 % sobre el total de ventas y el alquiler más los gastos fijos suman \$400.

   a) Describa las ganancias en función de los kilogramos producidos en cada una de las alternativas.

   b) Decida cuándo le conviene elegir una u otra alternativa.

Solución:

a) Llamaremos $A(p)$ y $B(p)$ a las ganancias correspondientes a las alternativas A y B respectivamente. La variable p da la producción de naranjas en kilogramos.

Si la cooperativa, por cada kilogramo le paga \$0,5 en consecuencia teniendo en cuenta los gastos fijos:

$$A(p) = 0{,}5p - 100$$

Por otra parte, en el puesto del mercado central recauda \$1 por kilogramo. En esta alternativa vende el 90 % de la producción. Entonces, si la producción es de p kilogramos, vende $0{,}9p$ kilos, a un peso el kilo, con lo que recauda $0{,}9p$ pesos. De esta recaudación neta hay que deducir los gastos para obtener $B(p)$:

- Impuestos del 20 % sobre las ventas: $0{,}2 \cdot 0{,}9p = 0{,}18p$.
- Alquiler más gastos fijos: \$400.
  - Total de gastos: $0{,}18p + 400$.

Pero entonces:

$$B(p) = 0{,}9p - (0{,}18p + 400) = 0{,}72p - 400$$

Luego, las funciones $A(p)$ y $B(p)$ son:

$$A(p) = 0{,}5p - 100 \tag{12.3.2}$$

$$B(p) = 0{,}72p - 400 \tag{12.3.3}$$

Las ecuaciones (12.3.2) y (12.3.3) dan las ganancias en cada una de las dos alternativas presentadas. Así, por ejemplo, si la producción del granjero es de 1000 kilogramos, la ganancia será:

$$\begin{array}{ll} A(1000) = 0{,}5 \cdot 1000 - 100 = 400 & \leftarrow \text{Alternativa } A \\ B(1000) = 0{,}72 \cdot 1000 - 400 = 320 & \leftarrow \text{Alternativa } B \end{array}$$

Los valores de las pendientes — 0,5 *para A y* 0,72 *para B* — determinan lo que en economía se llama *ganancia marginal*.

b) Debemos determinar cuándo le conviene al granjero adoptar la alternativa A y cuándo la alternativa B. Obviamente cuando $A(p) > B(p)$ la alternativa A sera más atractiva que la B, y a la inversa si pasa lo contrario.

Determinamos entonces, para qué valores de p resulta $A(p) > B(p)$:

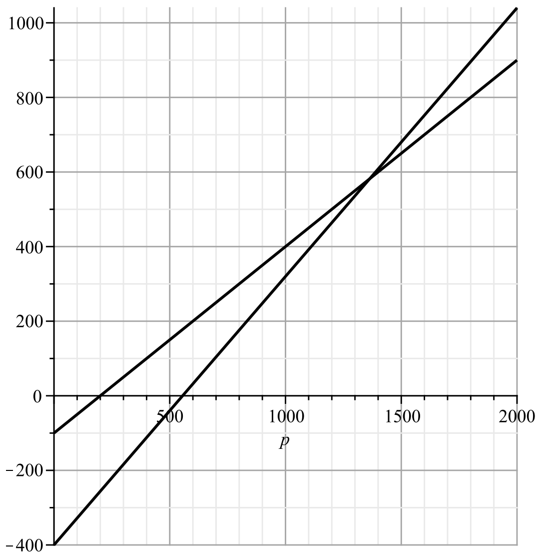
$$\begin{array}{rcl} A(p) > B(p) & \Leftrightarrow & 0{,}5p - 100 > 0{,}72p - 400 \\ & \Leftrightarrow & 400 - 100 > (0{,}72 - 0{,}5)\,p \\ & \Leftrightarrow & 300 > 0{,}22p \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{300}{0{,}22} > p \\ & \Leftrightarrow & p < \dfrac{15000}{11} \approx 1363{,}63 \end{array}$$

En consecuencia:

- Si $p < 1363{,}63$ kilogramos, conviene adoptar la alternativa A.
- Si $p > 1363{,}63$ kilogramos, conviene adoptar la alternativa B.

A los efectos de comprender la significación del valor $p = 1363{,}63$, ver la FIG. 12.3.11, que muestra el punto donde ambas alternativas coinciden, antes del cual conviene optar por la alternativa A, y luego del cual será conveniente adoptar la alternativa B.

Figura 12.3.11: ALTERNATIVAS A Y B



En la figura pueden apreciarse los gráficos correspondientes a $A(p)$ y $B(p)$, las dos alternativas correspondientes al problema del granjero. Podemos observar que antes del valor de $p = 1363{,}63$, la alternativa A es más conveniente que la B, pero luego de dicho punto, la alternativa B pasa a ser la más propicia. El punto de equilibrio muestra el valor de producción en kilogramos, donde ambas alternativas son igualmente convenientes.

Capítulo 13

Sistemas de dos Ecuaciones Lineales con dos Incógnitas

13.1. Teoría Básica

13.1.1. Motivación

En el Capítulo 7 hemos visto situaciones problemáticas de la vida cotidiana expresados con palabras, en los cuales el desafío consiste en traducir el enunciado de dichos problemas en una ecuación o inecuación algebraica conveniente que nos permita resolverlos.

En dichas ecuaciones tenemos una variable o incógnita que usualmente simbolizamos con la letra x, la cual representa la cantidad o el dato desconocido en el problema, pero en general, puede haber problemas en los cuales tengamos 2 o más cantidades o datos desconocidos.

Por ejemplo, supongamos que queremos hallar 2 números naturales x e y que satisfagan simultáneamente que al sumarlos el resultado sea 20 y al restarlos el resultado sea 10.

Entonces deben satisfacerse simultáneamente las ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

Por lo tanto, para resolver este problema no nos alcanza con una sola ecuación.

El problema conduce a plantear lo que llamaremos *sistema de ecuaciones lineales*.

Definición 13.1.1. Cuando dos o más ecuaciones lineales deben satisfacerse simultáneamente diremos que las ecuaciones constituyen o forman un *sistema de ecuaciones lineales*.

Definición 13.1.2. Un *sistema de ecuaciones lineales de* $m \times n$ es un sistema formado por m ecuaciones con n incógnitas. Por ejemplo:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = 8 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = -2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z & = 3 \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z & = -1 \end{cases}$$

es un sistema de cuatro ecuaciones — $m = 4$ — con tres incógnitas — $n = 3$.

En esta sección estudiaremos los sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 — *es decir* $m = n = 2$ — es decir los formados por 2 ecuaciones con 2 incógnitas. En general simbolizaremos a las incógnitas con las letras x e y y escribiremos los sistemas de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \text{ con } a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2 \text{ y } c_2 \in \mathbb{R} \tag{13.1.1}$$

Ejemplo 13.1.1. El sistema:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

es un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 con $a_1 = b_1 = a_2 = 1$, $c_1 = 20$, $b_2 = -1$ y $c_2 = 10$.

Resolver un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 es encontrar los valores reales de las incógnitas x e y tales que verifiquen simultáneamente las dos ecuaciones del sistema.

Definición 13.1.3. Una *solución* de (13.1.1) es un par ordenado (x_0, y_0) de números reales — *es decir* $x_0 \in \mathbb{R}$ *y* $y_0 \in \mathbb{R}$ — tales que al reemplazar a la incógnita x por el valor x_0 y a la incógnita y por y_0 en las dos ecuaciones, ambas se satisfacen simultáneamente.

Ejemplo 13.1.2. El par ordenado $(15, 5)$ es solución del sistema:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

En efecto:

$$\begin{cases} 15 + 5 = 20 \\ 15 - 5 = 10 \end{cases}$$

Definición 13.1.4. Diremos que dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* si tienen las mismas soluciones.

Ejemplo 13.1.3.

1. Los sistemas:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2y = 40 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

son dos sistemas equivalentes ya que la única solución de ambos es el par ordenado $(15, 5)$.

2. Los sistemas:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

no son equivalentes porque el par ordenado $(15, 5)$ es solución del primero pero no es solución del segundo, pues $15 - 5 \neq 0$ y por lo tanto no se verifica su segunda ecuación.

13.1.2. Operaciones que producen sistemas equivalentes

1. Intercambiar el orden de las ecuaciones del sistema.
2. Multiplicar ambos miembros de una de las ecuaciones por un número real no nulo.
3. Sumar o restar un múltiplo de una ecuación del sistema a otra ecuación del mismo sistema.

Ejemplo 13.1.4. Veamos un ejemplo de cada una de las operaciones presentadas anteriormente.

1. Los sistemas:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ x + y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$$

son equivalentes por aplicación de la primera propiedad.

2. Los sistemas:

$$\begin{cases} x - 7y = 3 \\ x + 9y = 5 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} 2x - 14y = 6 \\ \quad x + 9y = 5 \end{cases}$$

son equivalentes debido a la segunda propiedad, pues la primera ecuación del segundo sistema se obtiene al multiplicar por 2 ambos miembros de la primer ecuación del primer sistema.

3. Los sistemas:

$$\begin{cases} x + y = 8 & \leftarrow E_1 \\ x - y = 40 & \leftarrow E_2 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x + y = 8 & \leftarrow E_1' \\ \quad 2x = 48 & \leftarrow E_2' \end{cases}$$

son equivalentes debido a la tercera propiedad, pues la segunda ecuación del segundo sistema resulta de sumar a la segunda ecuación del primer sistema la primera ecuación de dicho sistema multiplicada por el número real -1. En símbolos esto es:

$$E_2' = E_2 + (-1) \cdot E_1$$

13.1.3. Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican teniendo en cuenta si tienen o no solución, y en caso de tenerla, si la solución es única o no.

Definición 13.1.5. Clasificamos los sistemas de ecuaciones lineales según el siguiente criterio:

1. Si el sistema tiene solución se dice que es un *sistema compatible*. (SC)
2. Si el sistema tiene una única solución se denomina *sistema compatible determinado*. (SCD)
3. Si el sistema tiene más de una solución se denomina *sistema compatible indeterminado*. (SCI)
4. Si el sistema no tiene solución se denomina *sistema incompatible*. (SI)

Ejemplo 13.1.5. Las siguientes situaciones ejemplifican lo enunciado en la definición anterior:

1. El sistema:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

es un (SCD) pues su única solución es el par ordenado $(15, 5)$.

2. El sistema:

$$\begin{cases} \quad x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$

es un (SCI) pues tiene más de una solución, por ejemplo, los pares ordenados $(0, 5)$ y $(1, 4)$ son soluciones del sistema.

3. El sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

es un (SI) pues no existen 2 números reales x e y que satisfagan las dos ecuaciones simultáneamente.

13.1.4. Métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2×2

A continuación daremos dos métodos para resolver los sistemas de ecuaciones lineales de 2×2. Dichos métodos nos dirán si el sistema es (SCD), (SCI) o bien (SI).

13.1.5. Método de Sustitución

El primer método, llamado *método de sustitución*, consiste en realizar los siguientes 4 pasos:

1. Se elige una de las ecuaciones del sistema y se expresa una de las dos incógnitas en términos de la otra.
2. Se sustituye la expresión obtenida en el paso anterior en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una incógnita.
3. Se resuelve la ecuación obtenida en el paso anterior y se obtiene así el valor numérico de la incógnita.
4. Se sustituye el valor numérico obtenido en el paso anterior en la expresión obtenida en el primer paso, y se despeja el valor numérico de la otra incógnita.

- Si era un (SCD), obtenemos la única solución.
- Si era un (SCI), cuando en el paso dos sustituimos la expresión obtenida en el paso uno, en la otra ecuación obtenemos una igualdad entre dos números y no nos queda una ecuación con una incógnita, entonces procederemos de otra manera.
- Si era un (SI), cuando en el paso dos sustituimos la expresión obtenida en el paso uno, obtenemos una igualdad entre números que no es cierta, y se concluye simplemente que el sistema es incompatible, y por lo tanto carece de solución, es decir: $S = \emptyset$.

Para comprender los detalles enumerados en los cuatro pasos de éste método, veamos como funciona el mismo en algunos ejemplos prácticos.

Ejemplo 13.1.6. Resolver:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ -x + y = 4 \end{cases}$$

Solución:

Aplicamos el método de sustitución.

1. Elegimos la segunda ecuación — *podríamos haber elegido la primera* — y expresamos a la incógnita y en términos de x, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} -x + y &= 4 \\ y &= x + 4 \end{aligned}$$

2. Sustituimos la expresión $y = x + 4$ en la primer ecuación, resultando:

$$x + 2(x + 4) = 2$$

3. Resolvemos la ecuación $x + 2(x + 4) = 2$:

$$\begin{aligned} x + 2(x + 4) &= 2 \\ 3x + 8 &= 2 \\ 3x &= -6 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

4. Sustituimos $x = -2$ en la expresión $y = x + 4$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} y &= -2 + 4 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Entonces es un (SCD) cuya única solución es el par ordenado $(-2, 2)$.

Luego: Su conjunto solución es:

$$S = \{(-2, 2)\}$$

Ejemplo 13.1.7. Resolver:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

Solución:

Aplicamos el método de sustitución.

1. Elegimos la primer ecuación y expresamos y en términos de x:

$$y = -x + 4$$

2. Reemplazamos $y = -x + 4$ en la segunda ecuación y obtenemos:

$$\begin{aligned} 2x + 2(-x + 4) &= 8 \\ 2x - 2x + 8 &= 8 \\ 8 &= 8 \end{aligned}$$

Obtuvimos una identidad, lo cual quiere decir que es un (SCI), ya que basta con que se satisfaga la ecuación $y = -x + 4$.

Su conjunto solución es:

$$S = \{(x, -x + 4) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$$

y tenemos rectas coincidentes.

Ejemplo 13.1.8. Resolver:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Solución:

Es claro que es un (SI), pero veamos que pasa si aplicamos el método de sustitución:

1. Elegimos la primer ecuación y expresamos y en términos de x:

$$y = -x + 1$$

2. Reemplazamos $y = -x + 1$ en la segunda ecuación, obteniendo:

$$\begin{aligned} x + (-x + 1) &= 3 \\ 1 &= 3 \leftarrow \text{¡ABSURDO!} \end{aligned}$$

Llegamos a una igualdad que no es cierta, lo cual nos indica que el sistema no tiene solución y que por lo tanto es un (SI). Su conjunto solución se expresa simbólicamente como:

$$S = \emptyset$$

Conclusión: El método de sustitución nos sirve no sólo para resolver un sistema, sino también para darnos cuenta y concluir si el sistema tiene o no solución, y si es única o hay infinitas soluciones.

13.1.6. Método de Igualación

El segundo método llamado *método de igualación*, consiste en realizar los siguientes pasos:

1. Se elige una de las incógnitas y se la expresa en términos de la otra en ambas ecuaciones.
2. Se igualan las expresiones obtenidas en el paso anterior y se obtiene una ecuación con una incógnita.
3. Se resuelve la ecuación obtenida en el paso anterior y se obtiene el valor numérico de dicha incógnita.
4. Se sustituye el valor obtenido en el paso 3 en alguna de las dos expresiones obtenidas en el paso 1.

- Si era un (SCD), obtendremos la única solución.
- Si era un (SCI), cuando en el paso 2 se igualan las expresiones obtenidas en el paso 1, obtenemos una igualdad entre dos números y no nos queda una ecuación. Esto último nos indica que debemos proceder de otra manera.
- Si el sistema era un (SI), cuando en el paso 2 se igualan las expresiones obtenidas en el paso 1, obtendremos una igualdad que no es cierta y se concluye entonces que el sistema no tiene solución.

Ejemplo 13.1.9. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

Solución:

Aplicamos el método de igualación.

1. Elegimos la incógnita y — *podríamos haber elegido* x — y la expresamos en términos de x en ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ -y &= -3x + 1 \\ y &= 3x - 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ y &= -2x + 2 \end{aligned}$$

2. Igualamos las expresiones obtenidas en el paso anterior, resultando:

$$3x - 1 = -2x + 2$$

3. Resolvemos la ecuación $3x - 1 = -2x + 2$, despejando la incógnita x como sigue:

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= -2x + 2 \\ 3x + 2x &= 2 + 1 \\ 5x &= 3 \\ x &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

4. Sustituimos $x = \frac{3}{5}$ en la expresión $y = 3x - 1$ — *podríamos haber elegido la expresión* $y = -2x + 2$ — resultando:

$$\begin{aligned} y &= 3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) - 1 \\ y &= \frac{9}{5} - 1 \\ y &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Luego: Es un (SCD) y su conjunto solución es:

$$S = \left\{ \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) \right\}$$

Observación. Al igual que en el método de sustitución, el método de igualación nos sirve no sólo para resolver un sistema, sino también para darnos cuenta y concluir si el mismo tiene o no solución, así como también si la solución es única o hay infinitas.

13.1.7. Interpretación gráfica de sistemas de ecuaciones lineales de 2×2

En la sección 13 en la pág. 227 vimos entre otras cosas que un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 puede tener una única solución (SCD), infinitas soluciones (SCI), o bien no tener solución (SI). Para ilustrar esta afirmación, a continuación daremos una interpretación gráfica de sistemas de ecuaciones lineales de 2×2.

En un sistema de ecuaciones lineales de 2×2, las 2 ecuaciones se pueden escribir en la forma:

$$\begin{cases} y = m_1 x_1 + b_1 \\ y = m_2 x_2 + b_2 \end{cases} \text{con } m_1,\ m_2,\ b_1 \text{ y } b_2 \in \mathbb{R}$$

Los gráficos de ambas ecuaciones vienen dados por rectas.

- Si el sistema tiene una única solución (x_0, y_0), es decir, si es un (SCD), dicho sistema representa geométricamente dos rectas que se intersecan únicamente en el punto (x_0, y_0) que es solución del mismo.
- Si el sistema tiene infinitas soluciones, es decir, si es un (SCI), el mismo representa geométricamente la misma recta — *o un par de rectas coincidentes*.
- Si el sistema no tiene solución, es decir, si es un (SI), el sistema representa geométricamente dos rectas paralelas que no se intersecan en ningún punto.

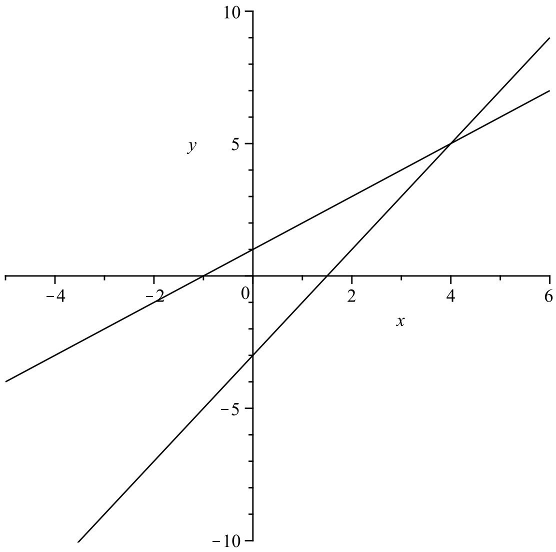
Ejemplo 13.1.10. Veamos a continuación ejemplos de las tres situaciones expuestas anteriormente.

1. El sistema:
$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$
es un (SCD), pues su conjunto solución es:
$$S = \{(4, 5)\}$$
Geométricamente su representación puede encontrarse en la Fig. 13.1.1.

2. El sistema:
$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x + 2 \end{cases}$$
es un (SCI), pues su conjunto solución es infinito. Geométricamente su representación puede encontrarse en la Fig. 13.1.2.

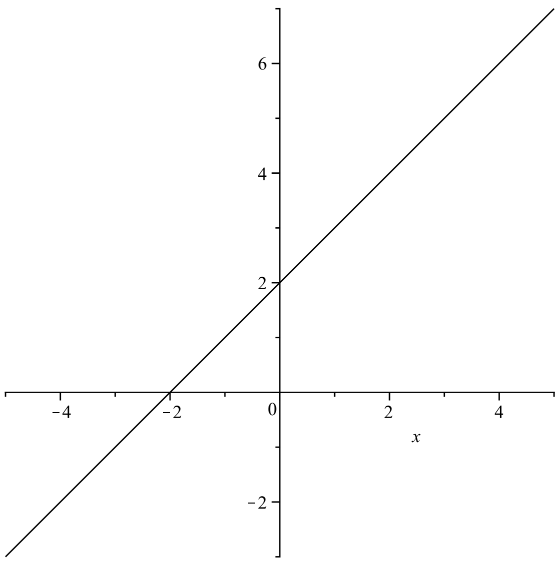
3. El sistema:
$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x + 3 \end{cases}$$
es un (SI), pues su conjunto solución es vacío. Geométricamente su representación puede encontrarse en la Fig. 13.1.3.

Figura 13.1.1: Sistema de ecuaciones compatible determinado (SCD)



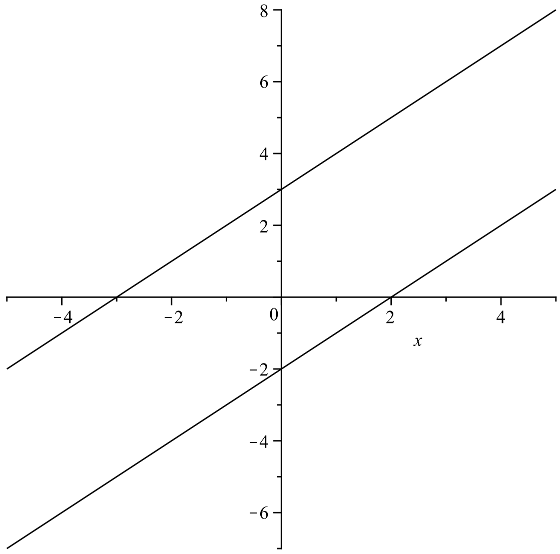
En la siguiente figura puede apreciarse la interpretación geométrica de lo que significa un sistema de ecuaciones de 2×2 compatible determinado. Vemos que el punto de intersección de ambas rectas se corresponde con el punto $P = (4, 5)$ que es la única solución del mismo.

Figura 13.1.2: Sistema de ecuaciones compatible indeterminado (SCI)



En la siguiente figura puede apreciarse la interpretación geométrica de lo que significa un sistema de ecuaciones de 2×2 compatible indeterminado. Vemos que ambas rectas son coincidentes, y de ahí que haya infinitas soluciones.

Figura 13.1.3: Sistema de ecuaciones incompatible (SI)



En la siguiente figura puede apreciarse la interpretación geométrica de lo que significa un sistema de ecuaciones de 2×2 incompatible. Vemos que ambas rectas son paralelas y no se cortan nunca, de ahí que no haya ningún punto solución.

Ejemplo 13.1.11. Resolver el siguiente sistema por el método de sustitución, y dar una interpretación gráfica del resultado obtenido:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ -x + y = 4 \end{cases}$$

Solución:

Aplicamos el método de sustitución.

1. Elegimos la segunda ecuación — *podríamos haber elegido la primera* — y expresamos a la incógnita y en términos de x, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} -x + y &= 4 \\ y &= x + 4 \end{aligned}$$

   a) Sustituimos la expresión $y = x + 4$ en la primer ecuación, resultando:

$$x + 2\,(x + 4) = 2$$

   b) Resolvemos la ecuación $x + 2\,(x + 4) = 2$:

$$\begin{aligned} x + 2\,(x + 4) &= 2 \\ 3x + 8 &= 2 \\ 3x &= -6 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

   c) Sustituimos $x = -2$ en la expresión $y = x + 4$ y obtenemos:

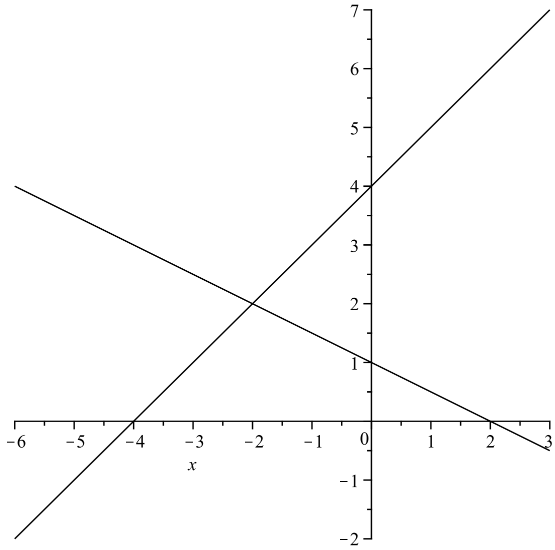
$$\begin{aligned} y &= -2 + 4 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

   Entonces es un (SCD) cuya única solución es el par ordenado $(-2, 2)$.

   Luego: Su conjunto solución es:

$$S = \{(-2, 2)\}$$

Figura 13.1.4: SISTEMA DE ECUACIONES COMPATIBLE DETERMINADO (SCD)



El gráfico nos muestra que las rectas se intersecan únicamente en el punto $(-2, 2)$ que es la única solución del sistema. El conjunto solución del mismo es:

$$S = \{(-2, 2)\}$$

Interpretación geométrica Expresamos en cada ecuación a la incógnita y en términos de x:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ 2y &= 2 - x \\ y &= -\frac{1}{2}x + 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -x + y &= 4 \\ y &= x + 4 \end{aligned}$$

Llamamos L_1 al gráfico de la recta de ecuación:

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

y L_2 al gráfico de la recta de ecuación:

$$y = x + 4$$

Es decir:

$$L_1 = \left\{\left(x, -\frac{1}{2}x + 1\right) / \, x \in \mathbb{R}\right\}$$

$$L_2 = \{(x, x + 4) / \, x \in \mathbb{R}\}$$

Como puede observarse en la FIG. 13.1.4, el gráfico nos muestra que las rectas se intersecan únicamente en el punto $(-2, 2)$ que es la única solución del sistema. El conjunto solución del mismo es:

$$S = \{(-2, 2)\}$$

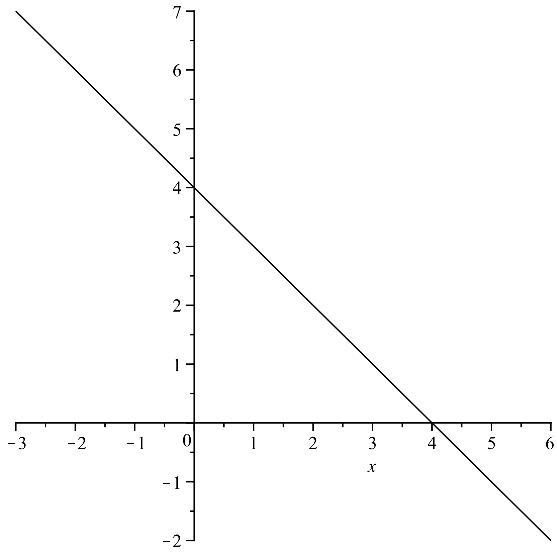
Ejemplo 13.1.12. Resolver el siguiente sistema por el método de sustitución, y dar una interpretación gráfica del resultado obtenido:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

Solución:

Aplicamos el método de sustitución.

Figura 13.1.5: Sistema de ecuaciones compatible indeterminado (SCI)



El gráfico nos muestra que las soluciones del sistema son los puntos de la recta de ecuación $y = -x + 4$.

1. Elegimos la primer ecuación y expresamos y en términos de x:

$$y = -x + 4$$

2. Reemplazamos $y = -x + 4$ en la segunda ecuación y obtenemos:

$$\begin{aligned} 2x + 2(-x + 4) &= 8 \\ 2x - 2x + 8 &= 8 \\ 8 &= 8 \end{aligned}$$

Obtuvimos una identidad, lo cual quiere decir que es un (SCI), ya que basta con que se satisfaga la ecuación $y = -x + 4$.

Su conjunto solución es:

$$S = \{(x, -x + 4) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$$

y tenemos rectas coincidentes.

Llamamos L al gráfico de la recta de ecuación $y = -x + 4$, es decir:

$$L = \{(x, -x + 4) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$$

Interpretación geométrica: Como puede observarse en la Fig. 13.1.5, el gráfico nos dice que las soluciones del sistema son los puntos de la recta de ecuación $y = -x + 4$.

Ejemplo 13.1.13. Resolver el siguiente sistema por el método de sustitución, y dar una interpretación gráfica del resultado obtenido:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

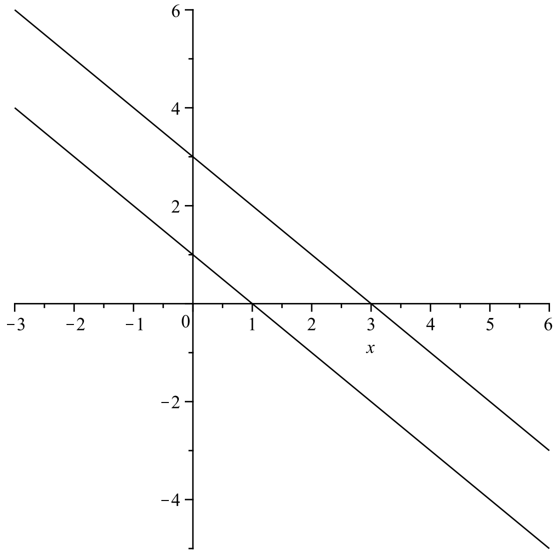
Solución:

Es claro que es un (SI), pero veamos que pasa si aplicamos el método de sustitución:

1. Elegimos la primer ecuación y expresamos y en términos de x:

$$y = -x + 1$$

Figura 13.1.6: Sistema de ecuaciones incompatible (SI)



El gráfico nos muestra que las soluciones del sistema son dos rectas paralelas, de ecuaciones $y = -x + 1$ e $y = -x + 3$.

2. Reemplazamos $y = -x + 1$ en la segunda ecuación, obteniendo:

$$\begin{aligned} x + (-x + 1) &= 3 \\ 1 &= 3 \leftarrow \text{¡ABSURDO!} \end{aligned}$$

Llegamos a una igualdad que no es cierta, lo cual nos indica que el sistema no tiene solución y que por lo tanto es un (SI). Su conjunto solución se expresa simbólicamente como:

$$S = \emptyset$$

Interpretación geométrica: Expresamos en cada ecuación a y en función de x y obtenemos las rectas de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y &= -x + 1 \\ y &= -x + 3 \end{aligned}$$

Llamamos:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(x, -x + 1) \,/\, x \in \mathbb{R}\} \\ L_1 &= \{(x, -x + 3) \,/\, x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Como puede observarse en la Fig. 13.1.6, el gráfico nos muestra que el sistema no tiene solución ya que tenemos 2 rectas que no se intersecan en ningún punto. El conjunto solución es $S = \emptyset$.

13.2. Ejercicios

1. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando los métodos de sustitución o igualación, según sea conveniente.

   Clasifique cada sistema en (SCD), (SCI) o (SI) y encuentre el conjunto solución.

   - Si es un (SCD), muestre gráficamente que la única solución es el punto de intersección de dos rectas.
   - Si es un (SCI), encuentre por lo menos dos soluciones.
   - Si es un (SI), grafique las dos rectas paralelas.

a)
$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} -3y + 3x = \dfrac{3}{2} \\ y = 4x - 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 4x = 5 - 2y \\ 8x = 10 - 4y \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x = \dfrac{y+3}{5} \\ x = \dfrac{y-2}{4} \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 2\left(x - \dfrac{1}{2}y\right) - 5 = 0 \\ \dfrac{2}{3}x = y + \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x - 4y = 3x + 2y \\ x = 2x - 2y \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}y = x \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{3}y = y \end{cases}$$

h)
$$\begin{cases} 2y - x = 2x \\ x - 9y = 3x + 2y \end{cases}$$

2. Halle los $a, b \in \mathbb{R}$ de manera que el sistema sea (SCD), (SCI) o (SI).

a)
$$\begin{cases} ax + y = 2a \\ -by = b \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} ax - y = 0 \\ x - ay = b \end{cases}$$

3. Escriba un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 cuyo conjunto solución sea $S = \{(2, -5)\}$.

4. Plantee un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 para resolver las siguientes situaciones problemáticas.

   a) Federico y Agustín se reparten \$46700 que ganaron en el casino jugando a los dados. Como Federico aportó mas dinero que Agustín, recibe el triple de lo que recibe Agustín. ¿Cuánto recibe cada uno?

   b) El perímetro de un triángulo isóceles es de 42cm. La diferencia entre dos de sus lados es de 3cm. ¿Cuánto miden sus lados?

c) Para pagar la cuota del gimnasio de \$140, Ignacio utilizó 15 billetes en total, de \$5 y de \$10. ¿Cuántos billetes de \$5 y de \$10 utilizó?

d) Javier venció a Julio en una elección presidencial de un club de fútbol en la que se registraron 32000 votos. Si 60 socios hubieran votado por Julio en lugar de Javier, entonces Julio hubiera ganado por 20 votos. ¿Cuántos socios votaron por Javier?

e) En una concesionaria hay 40 unidades en exposición, entre autos y motos. Si se cuentan 120 ruedas — *sin contar las de auxilio* — ¿Cuántas motos y cuántos autos hay?

f) La edad de un padre es 3 veces la edad de su hijo. Si hace 5 años era 4 veces la edad de su hijo. ¿Qué edad tiene cada uno?

g) Rodolfo tiene \$6 en monedas de 5 y 25 centavos. Si en total tiene 80 monedas: ¿Cuántas son de 5 centavos y cuántas son de 25 centavos?

h) En un número de 2 cifras la cifra de las decenas excede en 3 a la cifra de las unidades. Si se invierte el orden de las cifras se obtiene un nuevo número que si lo sumamos con el anterior y el resultado de dicha suma se lo aumenta en 3, obtenemos el número 124. Determine de qué número se trata.

i) El denominador de un número racional es 4 mas que el numerador. Si el numerador y el denominador se aumentan en 3 se obtiene el número racional $\frac{2}{5}$. Encuentre dicho número racional.

j) El día del examen de matemática se contaba con un cierto número de aulas. Se repartieron 35 alumnos por aula y quedaron 28 sin asiento. Entonces se ubicaron 38 en cada aula y quedaron 2 bancos libres. ¿Cuántos alumnos se presentaron al examen y cuántas aulas se utilizaron?

13.3. Teoría Complementaria

Para resolver los sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 hemos visto los métodos de sustitución e igualación.

A continuación veremos un nuevo método llamado *método de reducción*.

13.3.1. Método de Reducción

En la sección 13.1.2 de la pág. 228 vimos 3 operaciones que producen sistemas equivalentes. El método de reducción consiste en eliminar una de las incógnitas después de haber multiplicado por escalares convenientes en ambas ecuaciones — *si fuera necesario* — de tal forma que los coeficientes de la incógnita que se desea eliminar tengan el mismo valor absoluto.

Si los coeficientes coinciden las ecuaciones se restan y si son opuestos las ecuaciones se suman.

Ejemplo 13.3.1. Supongamos que queremos resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & \leftarrow E_1 \\ x + 2y = 3 & \leftarrow E_2 \end{cases} \tag{13.3.1}$$

Para resolverlo aplicamos el método de reducción. Si multiplicamos por 2 en ambos miembros de la ecuación E_2 y conservamos la ecuación E_1, obtendremos el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & \leftarrow E_1' \\ 2x + 4y = 6 & \leftarrow E_2' \end{cases} \tag{13.3.2}$$

Notemos que $E_1' = E_1$ y que $E_2' = 2E_1$. Como podemos observar, tenemos el mismo coeficiente en la incógnita x. Ahora, para eliminar la incógnita x restamos las ecuaciones miembro a miembro. En este caso, a la ecuación E_2' le restamos la ecuación E_1' y obtenemos la siguiente ecuación:

$$5y = 5 \leftarrow E_2''$$

Entonces reemplazando la ecuación E_2' por la ecuación E_2'' y conservando la ecuación E_1' obtendremos el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & \leftarrow E_1'' \\ \quad 5y = 5 & \leftarrow E_2'' \end{cases} \tag{13.3.3}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} E_1'' &= E_1' \\ E_2'' &= E_2' - E_1' = 2E_1 - E_1 \end{aligned}$$

Hemos eliminado la incógnita x, ahora resolvemos la ecuación E_2'', obteniendo:

$$y = 1$$

Reemplazando $y = 1$ en la ecuación E_1'' obtenemos:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 1 \\ \Leftrightarrow 2x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

Entonces el conjunto solución del sistema (13.3.3) es:

$$S = \{(1, 1)\}$$

Como los sistemas (13.3.1) y (13.3.3) son equivalentes, tienen las mismas soluciones, de donde el conjunto solución de (13.3.1) es:

$$S = \{(1, 1)\}$$

Capítulo 14

Funciones Cuadráticas

14.1. Teoría Básica

Las funciones cuadráticas nos permiten en muchas ocasiones describir fenómenos relacionados con diversas ciencias como la física, la biología, la economía, etc. Por ejemplo, para analizar algunas situaciones relacionadas con la compra y venta de ciertos bienes hay economistas que definen funciones de oferta y de demanda, las cuales describen como varía la cantidad de unidades ofrecidas o demandadas, respectivamente, de un cierto bien, en relación con el precio.

Podemos considerar como ejemplo una mercancía de una distribuidora de lapiceras cuya función de oferta viene dada por:

$$O(p) = 0{,}4p^2 - 10$$

siendo O la cantidad de productos ofrecidos en miles de unidades y p su precio en pesos, por unidad.

O bien, podemos suponer que durante el verano la función de demanda que describe el comportamiento del mercado viene dada por la fórmula:

$$D(p) = 100 - 0{,}3p^2$$

siendo D la cantidad de productos demandados en miles de unidades y p su precio en pesos, por unidad.

En física pueden utilizarse por ejemplo para describir la trayectoria de una bola que se lanza hacia arriba, así como la altura máxima que alcanza, o si se la lanza horizontalmente se puede calcular cuál fue la distancia que recorrió hasta tocar el suelo, etc...

Por lo tanto, es de gran utilidad comprender que la matemática en general, es fundamental para estudiar y comprender los fenómenos que nos rodean en la vida cotidiana.

Entonces, empecemos por definir la expresión algebraica de una función cuadrática.

Definición 14.1.1. Una *función cuadrática* f es una función que se puede escribir en la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. Diremos que a es el *coeficiente principal* de la función cuadrática, b es el *coeficiente del término lineal* y c es el *término independiente*.

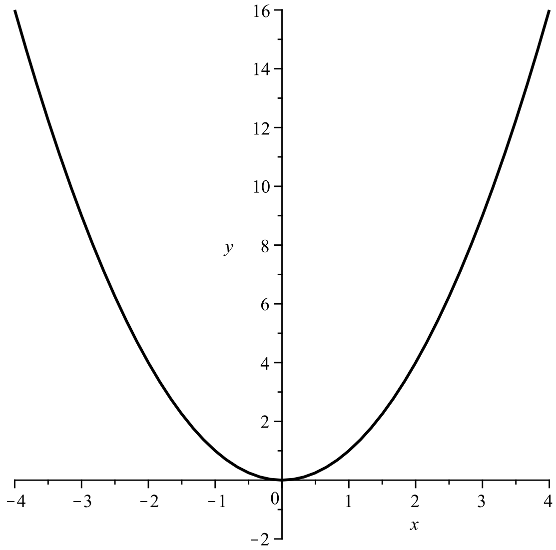
Es importante que $a \neq 0$, ya que si $a = 0$, obtendríamos una función lineal, la cual ya hemos analizado en la sección 12.

El dominio natural de este tipo de funciones es $\mathbb{R}$ y al representarlas gráficamente se obtiene una curva llamada *parábola*, la cual presenta un eje de simetría vertical y sobre él un punto llamado vértice, el cual es muy importante por razones que veremos más adelante en esta sección.

Ejemplo 14.1.1. Consideremos la función cuadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Observemos que en este caso $a = 1$, $b = c = 0$. A partir de una tabla de valores daremos un gráfico aproximado de f, es decir, evaluaremos a la función en algunos valores convenientes para obtener algunos puntos de su gráfico y uniremos dichos puntos mediante la curva que éstos describen.

Formemos la siguiente tabla:

Figura 14.1.1: GRÁFICO DE LA FUNCIÓN $y = x^2$



En la figura puede apreciarse un gráfico aproximado de la función $y = x^2$.

x	$y = f(x)$
0	0
1	1
−1	1
2	4
−2	4
3	9
−3	9

Con esta tabla, representamos los puntos obtenidos y uniéndolos por la curva que describen podemos deducir que un gráfico aproximado de f es el que se presenta en la FIG. 14.1.1.

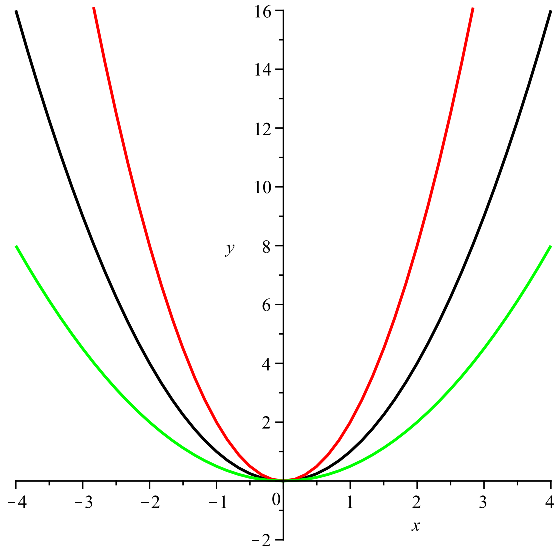
Podemos hacer las siguientes observaciones:

- El gráfico de la función es una parábola con vértice en $(0, 0)$.
- El menor valor de la función es $y = 0$ y se alcanza en $x = 0$ — *pues* $f(0) = 0$ *y* $f(x) > 0$ *para todo* $x \neq 0$.
- $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$.
- f es decreciente en $(-\infty, 0)$.
- f es creciente en $(0, +\infty)$.
- Su gráfico es simétrico respecto del eje y — *es decir simétrico respecto de la recta* $x = 0$. El gráfico de la función $f(x) = x^2$ es de gran importancia ya que veremos que los gráficos de todas las funciones cuadráticas se obtienen a partir de él.

Ejemplo 14.1.2. En el caso de $y = 2x^2$, su gráfico se obtiene alargando verticalmente en un factor de 2 el gráfico de $y = x^2$ — *porque cada coordenada* y *se multiplica por* 2. En el caso de $y = \frac{1}{2}x^2$, su gráfico se obtiene comprimiendo verticalmente en un factor de 2 el gráfico de $y = x^2$ — *porque cada coordenada* y *se multiplica por* $\frac{1}{2}$.

En la FIG. 14.1.2 se han representado los gráficos de $y = x^2$, $y = 2x^2$ e $y = \frac{1}{2}x^2$ simultáneamente en un mismo sistema de ejes coordenados para que el lector compruebe que la variación en el aspecto del gráfico es la descripta anteriormente.

Figura 14.1.2: Gráfico de las funciones $y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = \frac{1}{2}x^2$



En la figura se han representado los gráficos de $y = x^2$, $y = 2x^2$ e $y = \frac{1}{2}x^2$ simultáneamente en un mismo sistema de ejes coordenados, para que el lector compruebe el efecto que produce en una función cuadrática modificar el coeficiente principal.

Ejemplo 14.1.3. Si queremos graficar $y = -x^2$, $y = -2x^2$ e $y = -\frac{1}{2}x^2$ simplemente debemos reflejar respecto al eje x los gráficos de $y = x^2$, $y = 2x^2$ e $y = \frac{1}{2}x^2$ respectivamente — *ver* Fig. 14.1.3.

- El gráfico de $y = -x^2$ se obtiene reflejando el gráfico de $y = x^2$.
- El gráfico de $y = -2x^2$ se obtiene alargando verticalmente en un factor de 2 el gráfico de $y = x^2$ y luego reflejando respecto del eje x el gráfico de $y = 2x^2$.
- El gráfico de $y = -\frac{1}{2}x^2$ se obtiene comprimiendo verticalmente en un factor de 2 el gráfico de $y = x^2$ y luego reflejando respecto del eje x el gráfico de $y = \frac{1}{2}x^2$.

Entonces efectivamente los gráficos de $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 2x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$ e $y = -2x^2$ se obtuvieron a partir de ciertas transformaciones del gráfico de $y = x^2$ — *en estos ejemplos realizamos las transformaciones denominadas transformaciones de alargamiento, compresión y reflexión.*

Observemos que $y = x^2$, $y = 2x^2$ e $y = \frac{1}{2}x^2$ son funciones cuadráticas que se escriben en la forma $y = ax^2$ con $a > 0$ y sus gráficos son parábolas cuyas ramas se abren hacia arriba, mientras que $y = -x^2$, $y = -2x^2$ e $y = -\frac{1}{2}x^2$ son funciones cuadráticas que se escriben en la forma $y = ax^2$ con $a < 0$ y sus gráficos son parábolas cuyas ramas se abren hacia abajo.

Las distintas posibilidades para los gráficos de las funciones cuadráticas de la forma $y = ax^2$ según sea el signo de a pueden apreciarse en la Fig. 14.1.4.

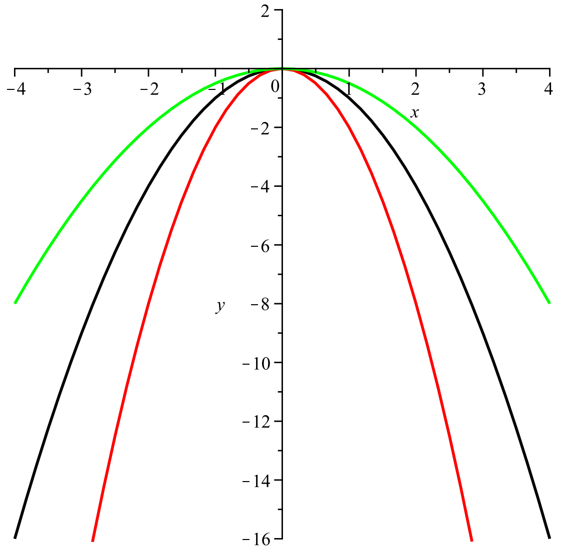
Observación 14.1.1. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b, y c números reales, $a \neq 0$. Si $a > 0$, el gráfico de f es una parábola cuyas ramas se abren hacia arriba. Si $a < 0$, el gráfico de f es una parábola cuyas ramas se abren hacia abajo.

Definición 14.1.2. Un *cero* o *raíz* de una función f es un valor $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $f(x_0) = 0$.

14.1.1. Intersecciones con los ejes coordenados

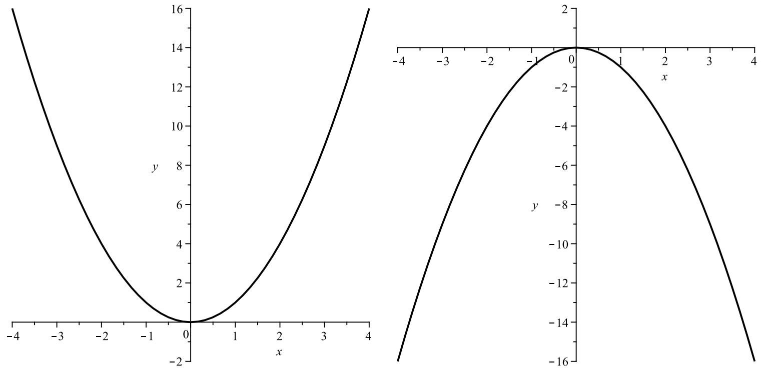
Dada una función f, sabemos que para determinar si su gráfico interseca a los ejes coordenados, debemos analizar las siguientes situaciones:

Figura 14.1.3: Gráfico de las funciones $y = -x^2$; $y = -2x^2$; $y = -\frac{1}{2}x^2$



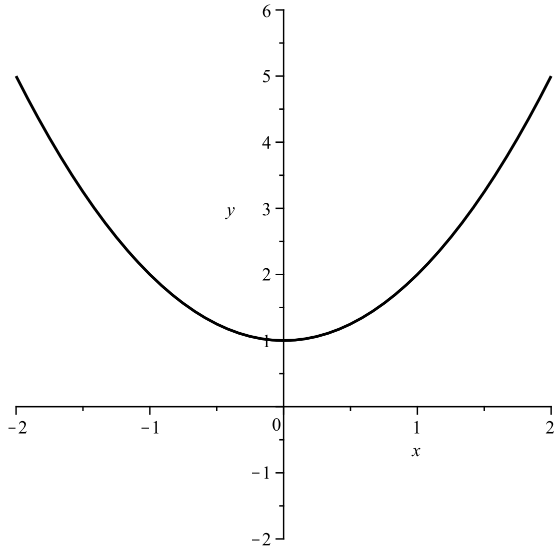
En la figura se han representado los gráficos de $y = -x^2$, $y = -2x^2$ e $y = -\frac{1}{2}x^2$ simultáneamente en un mismo sistema de ejes coordenados, para que el lector compruebe el efecto que produce en una función cuadrática modificar el coeficiente principal.

Figura 14.1.4: Gráficos de $y = ax^2$ según el signo de a



En la figura puede apreciarse el aspecto del gráfico de las funciones cuadráticas de la forma $y = ax^2$, según sea $a > 0$ — *izquierda* — o $a < 0$ — *derecha*.

Figura 14.1.5: Gráfico de $y = x^2 + 1$



En la figura puede apreciarse el gráfico de $f(x) = x^2 + 1$. Vemos que no interseca al eje x y que su intersección con el eje y se da en el punto $P = (0, 1)$.

- Para determinar si el gráfico de f interseca al eje y, debemos analizar si $0 \in \mathrm{Dom}(f)$. Si esto es así, el gráfico de f interseca al eje y únicamente en el punto $(0, f(0))$. Si $0 \notin \mathrm{Dom}(f)$ entonces el gráfico de f no interseca al eje y.

  Si f es una función cuadrática en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y $c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, entonces $0 \in \mathrm{Dom}(f)$ y por lo tanto su gráfico interseca al eje y en el punto $(0, f(0))$. Observemos que $f(0) = c$, por lo tanto el gráfico de f interseca al eje y en el punto $(0, c)$.

- Para determinar si el gráfico de f interseca al eje x, debemos analizar si f tiene o no raíces reales, es decir, debemos analizar la ecuación cuadrática:

  $$ax^2 + bx + c = 0$$

  Recordemos que en la sección 7.1.4 en la pág. 97 se estudió con detalle este tipo de ecuaciones.

  Recordemos además que:

  - Si $b^2 - 4ac > 0$ la ecuación tiene exactamente 2 soluciones reales distintas que vienen dadas por:

    $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

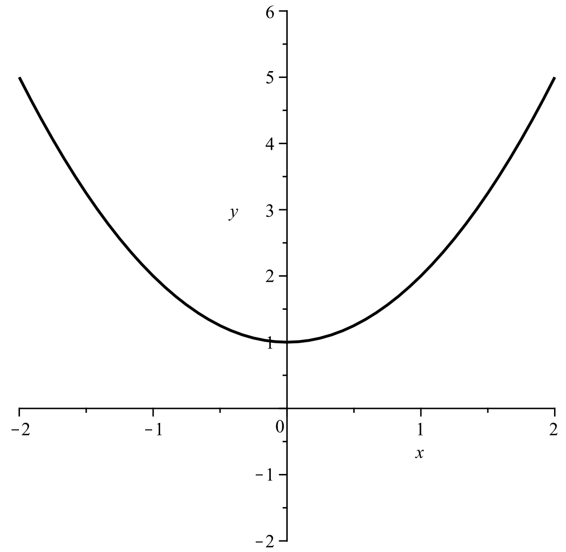
    y por lo tanto el gráfico de f interseca al eje x 2 veces.
  - Si $b^2 - 4ac = 0$ la ecuación tiene una única solución real que viene dada por:

    $$x = -\frac{b}{2a}$$

    y por lo tanto el gráfico de f interseca al eje x una única vez.
  - Si $b^2 - 4ac < 0$ la ecuación no tiene soluciones reales y por lo tanto el gráfico de f no interseca al eje x.

Ejemplo 14.1.4. Si $f(x) = x^2 + 1$, $a = 1$, $b = 0$ y $c = 1$. Como $b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0$, entonces su gráfico no tiene intersección con el eje x y su intersección con el eje y es el punto $(0, 1)$ ya que $c = 1$ — *ver* Fig. 14.1.5.

Figura 14.1.6: GRÁFICO DE $y = x^2 + 1$



En la figura puede apreciarse el gráfico de $f(x) = x^2 + 1$. Vemos que no interseca al eje x y que su intersección con el eje y se da en el punto $P = (0, 1)$.

Ejemplo 14.1.5. Si $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $a = 1$, $b = -2$ y $c = 1$. Como $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$, entonces su única raíz es:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$$

y por lo tanto su gráfico interseca al eje x en el punto $P = (1, 0)$ y su intersección con el eje y se da en el punto $Q = (0, 1)$ — *ver* FIG. 14.1.6.

Además como la única raíz de f es $x = 1$, podemos escribir $f(x) = 1 \cdot (x - 1)^2$ — *ver* SECCIÓN 7.1.4 *en la pág. 97*.

Ejemplo 14.1.6. Si $f(x) = x^2 - 1$, el lector puede verificar que sus raíces son $x = -1$ y $x = 1$ y que por lo tanto su gráfico interseca al eje x en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ e interseca al eje y en el punto $(0, -1)$. Podemos escribir:

$$f(x)) = (x - 1)(x + 1)$$

y su gráfico aproximado puede ser consultado en la FIG. 14.1.7.

El gráfico de $y = x^2 + 1$ se obtiene desplazando el gráfico de $y = x^2$ una unidad hacia arriba. El gráfico de $y = (x - 1)^2$ se obtiene desplazando el gráfico de $y = x^2$ una unidad a la derecha. El gráfico de $y = x^2 - 1$ se obtiene desplazando el gráfico de $y = x^2$ una unidad hacia abajo.

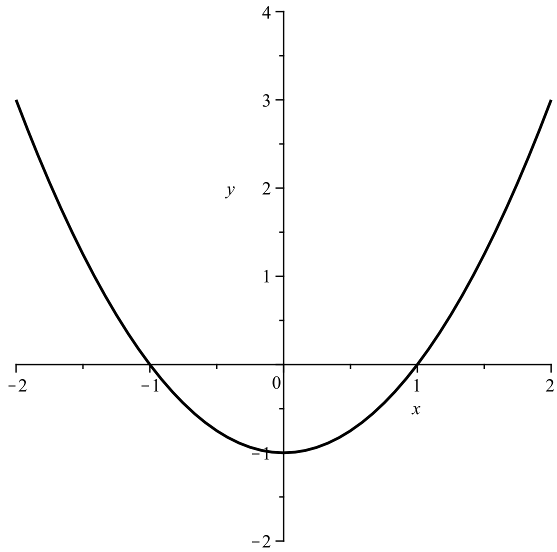
Pero entonces, los gráficos de $y = x^2 + 1$, $y = (x - 1)^2$ e $y = x^2 - 1$ se obtuvieron realizando transformaciones de desplazamiento verticales y horizontales al gráfico de $y = x^2$ — *ver* FIG. 14.1.8.

14.1.2. Vértice de una parábola

Un valor máximo o mínimo de una función es el valor más grande o más pequeño de la función en un intervalo. Para una función que representa la ganancia en un negocio es probable que estuviéramos interesados en hallar el valor máximo de dicha función, y para una función que representa la cantidad de material requerida en el proceso de manufactura de algún artículo se estaría probablemente interesado en hallar el valor mínimo — *para ahorrar material*.

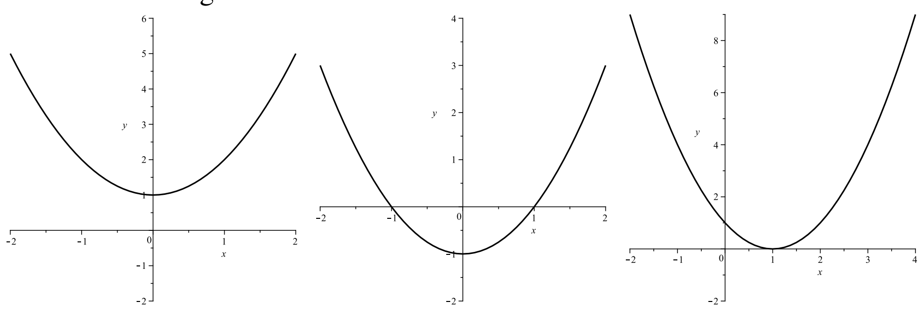
En una función cuadrática el valor máximo o mínimo quedará determinado por un punto de su gráfico que llamaremos *vértice* el cual definiremos a continuación.

Figura 14.1.7: Gráfico de $y = x^2 - 1$



En la figura puede apreciarse el gráfico de $f(x) = x^2 - 1$. Vemos que interseca al eje x en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ e interseca al eje y en el punto $(0, -1)$.

Figura 14.1.8: Desplazamientos de una Parábola



En la figura puede apreciarse que el gráfico de $y = x^2 + 1$ se obtiene desplazando el gráfico de $y = x^2$ una unidad hacia arriba. El gráfico de $y = (x - 1)^2$ se obtiene desplazando el gráfico de $y = x^2$ una unidad a la derecha. El gráfico de $y = x^2 - 1$ se obtiene desplazando el gráfico de $y = x^2$ una unidad hacia abajo.

Definición 14.1.3. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b y c números reales y $a \neq 0$. Si $a > 0$, el gráfico de f es una parábola cuyas ramas se abren hacia arriba y el *vértice* será el punto más bajo sobre dicha parábola. Si $a < 0$, el gráfico de f es una parábola cuyas ramas se abren hacia abajo y el *vértice* será el punto más alto sobre dicha parábola. Al vértice lo notaremos:

$$V = (x_v, y_v)$$

Ejemplo 14.1.7. En $y = -x^2$, $y = -2x^2$ e $y = -\frac{1}{2}x^2$ el vértice es $V = (0, 0)$ — *ver* FIG. 14.1.3. En $y = x^2 + 1$, $y = (x-1)^2$ e $y = x^2 - 1$ los vértices son $V = (0, 1)$, $V = (1, 0)$ y $V = (0, -1)$ respectivamente — *ver* FIG. 14.1.8.

Veremos que el vértice es de gran importancia para graficar con precisión una función cuadrática y entender su comportamiento.

14.1.3. Valor máximo o mínimo de una función cuadrática

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c números reales y $a \neq 0$ y sea $V = (x_v, y_v)$ el vértice de la parábola.

- Si $a > 0$, entonces el *valor mínimo* de f es $y_v = f(x_v)$ y se alcanza en $x = x_v$.
- Si $a < 0$, entonces el *valor máximo* de f es $y_v = f(x_v)$ y se alcanza en $x = x_v$.

Ejemplo 14.1.8. Si $f(x) = x^2 + 1$, sabemos que su gráfico es el representado en la FIG. 14.1.5 en la pág. 247. Como $a = 1 > 0$, entonces el valor mínimo de f es $f(0) = 1$ y se alcanza en $x = 0$ pues $V = (x_v, y_v) = (0, 1)$.

Ejemplo 14.1.9. Si $f(x) = -x^2$, sabemos que su gráfico es el dado en la FIG. 14.1.4. Como $a = -1 < 0$, entonces el valor máximo de f es $f(0) = 0$ y se alcanza en $x = 0$, pues $V = (x_v, y_v) = (0, 0)$.

14.1.4. Imagen de una función cuadrática

Si tenemos una función $f : A \to B$, su imagen es el conjunto:

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in B : \exists\, x \in \mathrm{Dom}(f) \,/\, y = f(x)\}$$

En el caso de las funciones cuadráticas, su imagen queda determinada por la coordenada y_v del vértice de la parábola que describe su gráfico.

En efecto, sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b y c números reales y $a \neq 0$ y sea $V = (x_v, y_v)$ el vértice de la parábola que describe su gráfico:

- Si $a > 0$, entonces el valor mínimo de f es $y_v = f(x_v)$ y su imagen es $\mathrm{Im}(f) = [y_v, +\infty)$.
- Si $a < 0$, entonces el valor máximo de f es $y_v = f(x_v)$ y su imagen es $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, y_v]$.

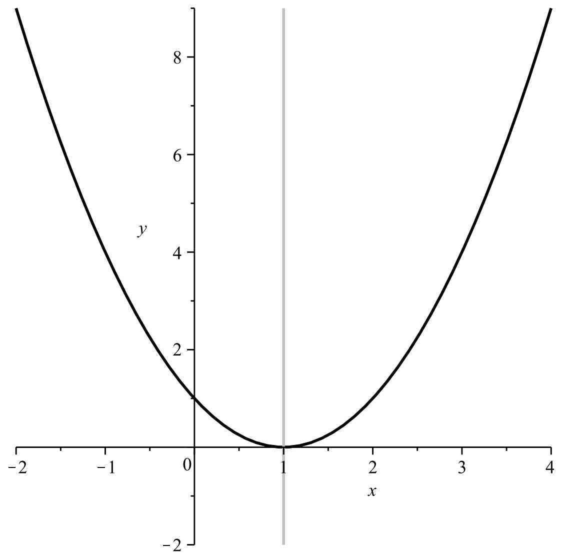
En el ejemplo anterior, si $f(x) = x^2 + 1$ entonces $\mathrm{Im}(f) = [1, +\infty)$. Si $f(x) = -x^2$, entonces $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 0]$.

14.1.5. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

Para determinar el crecimiento y decrecimiento de una función cuadrática necesariamente debemos conocer el vértice $V = (x_v, y_v)$ de la parábola que describe su gráfico, ya que el crecimiento y decrecimiento de la misma quedan determinados por la coordenada x_v de dicho vértice.

En efecto, sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b, c números reales y $a \neq 0$, y sea $V = (x_v, y_v)$ el vértice de la parábola que describe su gráfico:

Figura 14.1.9: Eje de Simetría de una Parábola



En la figura puede apreciarse que el gráfico de una parábola es simétrico con respecto a la recta vertical $x = x_v$. En el caso de la figura, la parábola representada es $f(x) = (x-1)^2$ y su $x_v = 1$.

- Si $a > 0$, f decrece en $(-\infty, x_v)$ y f crece en $(x_v, +\infty)$.
- Si $a < 0$, f crece en $(-\infty, x_v)$ y f decrece en $(x_v, +\infty)$.

Ejemplo 14.1.10. Si $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, su gráfico puede ser consultado en la Fig. 14.1.6 de la pág. 248, y tal como puede observarse en el mismo, como $a = 1 > 0$, f decrece en $(-\infty, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$. Gráficamente se observa que los valores de la función disminuyen sobre el intervalo $(-\infty, 1)$ y aumentan sobre el intervalo $(1, +\infty)$.

Ejemplo 14.1.11. Si $f(x) = -x^2$, sabemos que su gráfico es uno de los que puede apreciarse en la Fig. 14.1.8 en la pág. 249, y tal como surge del mismo, al ser $a = -1 < 0$, f decrece en $(0, +\infty)$ y crece en $(-\infty, 0)$.

Observación importante: El gráfico de una función cuadrática es simétrico respecto a la recta vertical de ecuación $x = x_v$ — *ver* Fig. 14.1.9.

Hemos observado que para entender el comportamiento y gráfico de una función cuadrática, es fundamental conocer el vértice $V = (x_v, y_v)$ de la misma. A continuación veremos una forma de hallarlo.

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b, c números reales, $a \neq 0$. El método que describimos a continuación se conoce como Método de Completar Cuadrados, y sirve para reescribir una función cuadrática de manera tal que de dicha escritura surjan naturalmente el x_v y el y_v:

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\
&= a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)
\end{aligned}$$

Observemos que el término $c-\frac{b^2}{4a}$ es constante, y por lo tanto sólo produce un desplazamiento hacia arriba o hacia abajo en la parábola. De esta forma, el crecimiento y decrecimiento de la misma estaría gobernado por el término:

$$a\left(x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2$$

Si $a > 0$, entonces:

$$a\left(x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 \geq 0$$

y se deduce que f alcanza su valor mínimo cuando el término anterior se anula, es decir cuando $x = -\frac{b}{2a}$.

Si $a < 0$, entonces:

$$a\left(x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 \leq 0$$

y se deduce que f alcanza su valor máximo cuando el término anterior se anula, es decir cuando $x = -\frac{b}{2a}$.

Antes habíamos visto que:

- Si $a > 0$, el valor mínimo de f es $y_v = f(x_v)$ y se alcanza en $x = x_v$.
- Si $a < 0$, el valor máximo de f es $y_v = f(x_v)$ y se alcanza en $x = x_v$.

En consecuencia se deduce que si $V = (x_v, y_v)$, entonces:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \qquad\qquad y_v = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = c - \frac{b^2}{4a}$$

Pero entonces, el vértice del gráfico de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se calcula mediante las fórmulas:

$$\boxed{x_v = -\frac{b}{2a}} \qquad\qquad \boxed{y_v = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = c - \frac{b^2}{4a}} \tag{14.1.1}$$

Ejemplo 14.1.12. Si $f(x) = x^2 - 2x + 5$, entonces $a = 1$, $b = -2$ y $c = 5$. Según la fórmula (14.1.1) se desprende que:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\cdot 1} = 1$$
$$y_v = f(x_v) = f(1) = 1^2 - 2\cdot(1) + 5 = 4$$

Por lo tanto el vértice es:

$$V = (1, 4)$$

Ejemplo 14.1.13. Si $f(x) = x^2 + 1$, entonces $a = 1$, $b = 0$ y $c = 1$. Procediendo como en el ejemplo anterior, resulta:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2\cdot 1} = 0$$
$$y_v = f(x_v) = f(0) = 1$$

Por lo tanto el vértice es:

$$V = (0, 1)$$

como ya habíamos visto anteriormente sin recurrir a la fórmula (14.1.1).

14.1.6. Forma Canónica de una Función Cuadrática

Si tenemos $f(x) = ax^2 + bx + c$ una función cuadrática, vimos que podemos expresarla en la forma:

$$f(x) = a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

y vimos además que:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \qquad\qquad y_v = f(x_v) = c - \frac{b^2}{4a}$$

En general no es necesario recordar la fórmula para el y_v pues el mismo se deduce simplemente evaluando la función $f(x)$ en el x_v, y la forma usual en que suele expresarse más concisamente la función es:

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$$

Entonces cuando expresamos a la función en la forma anterior, diremos que f está expresada en *forma canónica*. Ahora sí, deducimos que el gráfico de una función cuadrática se obtiene realizando ciertas transformaciones al gráfico de $y = x^2$. En efecto, si $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos escribirla en la forma canónica:

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$$

con lo cual deducimos que el gráfico de f se obtiene realizando transformaciones de traslaciones — *desplazamientos horizontales y verticales* — y de alargamiento y reflexión, dependiendo cómo sean a, x_v e y_v.

Ejemplo 14.1.14. Expresar la función $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ en forma canónica y realizar el gráfico aproximado de la misma.

Solución:

Para expresar la función en forma canónica debemos hallar x_v e y_v. En este caso $a = 3$, $b = -6$ y $c = 5$, entonces:

$$\begin{aligned} x_v &= -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 3} = 1 \\ y_v &= f(x_v) = f(1) = 3 \cdot (1)^2 - 6 \cdot (1) + 5 = 2 \end{aligned}$$

y por lo tanto el vértice resulta:

$$V = (1, 2)$$

Entonces la forma canónica de f es:

$$f(x) = 3(x - 1)^2 + 2$$

Para obtener un gráfico aproximado, debemos desplazar el gráfico de $y = x^2$ una unidad hacia la derecha, alargarlo verticalmente en un factor de 3 y desplazarlo dos unidades hacia arriba.

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente y además el hecho de que $f(0) = 5$, el gráfico de $f(x)$ termina siendo aquel presentado en la Fig. 14.1.10.

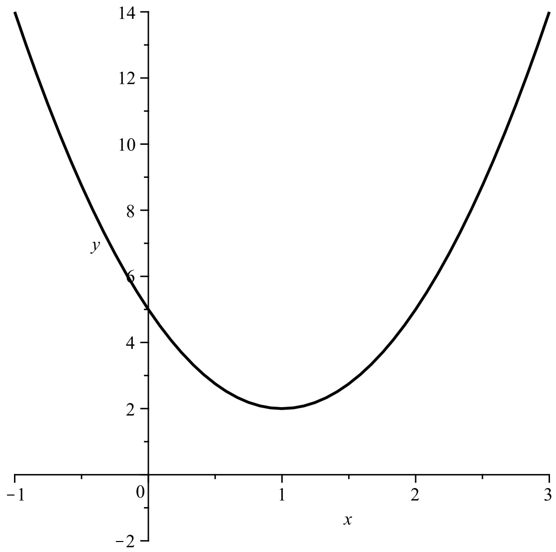
14.2. Ejercicios

1. Halle los gráficos de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 3x^2$

   b) $f(x) = -3x^2$

Figura 14.1.10: Gráfico de la función $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$



En la figura puede apreciarse el gráfico de la función cuadrática $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$.

Figura 14.2.1: Gráfico del Ejercicio 2

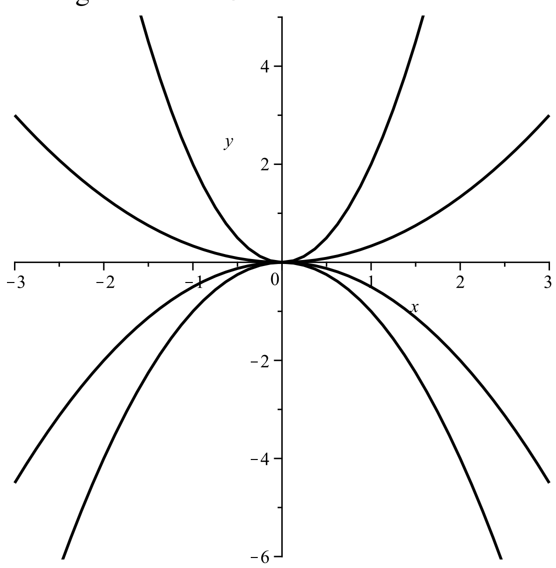
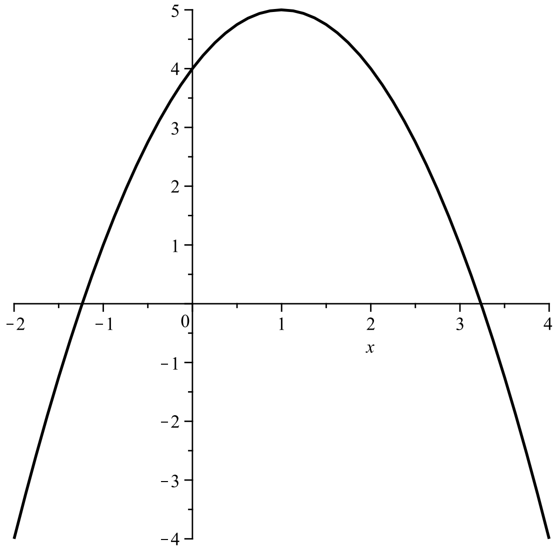


Figura 14.2.2: Gráfico del Ejercicio 3



c) $f(x) = 3x^2 - 2$

d) $f(x) = 3x^2 + 5$

e) $f(x) = -3x^2 + 1$

f) $f(x) = -3x^2 - 6$

2. Identifique cada gráfico con la ecuación indicada — *ver* Fig. 14.2.1:

    a) $y = 2x^2$

    b) $y = -x^2$

    c) $y = -\frac{1}{2}x^2$

    d) $y = \frac{1}{3}x^2$

3. Identifique la ecuación del siguiente gráfico — *ver* Fig. 14.2.2:

4. Hallar el vértice de la parábola que describe el gráfico de las siguientes funciones cuadráticas:

    a) $f(x) = x^2 - 2x$

    b) $f(x) = (2 - x)(x + 3)$

    c) $f(x) = (x - 1)^2 + 4$

    d) $f(x) = x^2 - 2$

    e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$

    f) $f(x) = (3 - x)^2$

5. Dada la función $f(x) = x^2 - 6x + 10$, indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    a) La función decrece en el intervalo $(0, +\infty)$.

    b) La función se abre hacia arriba.

    c) El gráfico interseca al eje x.

    d) El valor mínimo de $f(x)$ se alcanza en $x = 3$.

    e) El valor mínimo de $f(x)$ es 3.

6. Para cada una de las siguientes funciones, hallar los intervalos de crecimiento, decrecimiento y su imagen.

a) $f(x) = 2(x-1)^2 + 4$

b) $f(x) = (x-1)(x+3)$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

d) $f(x) = 2x^2 - 4$

e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 2$

7. Hallar la fórmula de una función cuadrática cuyo gráfico sea una parábola que pasa por los puntos $(3,0)$, $(-1,0)$ y $(0,-6)$. ¿Es única?

8. Hallar la fórmula de una función cuadrática cuyo gráfico sea una parábola que tenga vértice $V = (2,-1)$ y que no corte al eje x. ¿Es única?

9. Hallar la fórmula de una función cuadrática cuyo gráfico sea una parábola que pasa por los puntos $(-4,0)$, $(-2,0)$ y su imagen es el intervalo $(-\infty, 9]$.

10. Entre todos los rectángulos de perímetro 20cm, hallar las dimensiones del de área máxima. ¿Cuál es el valor de dicha área?

11. Un fabricante determina que el ingreso I obtenido por la producción y venta de x artículos está dado por la función:
$$I(x) = 350x - \frac{1}{4}x^2$$
Determine cuántos artículos deben fabricarse y venderse para obtener un máximo ingreso. ¿Cuál es el ingreso máximo?

12. En una empresa que produce cestos de basura, el costo promedio — *en pesos* — por unidad al producir una cantidad x de cestos es:
$$C(x) = 0{,}02x^2 - 0{,}6x + 40$$
a) ¿Qué número de cestos producidos minimizaría el costo promedio?

b) ¿Cuál sería el costo promedio si se produjera dicha cantidad de cestos?

13. La efectividad de un comercial de televisión depende de cuántas veces lo vea un televidente. Después de algunos experimentos una agencia de publicidad encuentra que si la efectividad E se mide en una escala de 0 a 10, entonces:
$$E(n) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{90}n^2$$
donde n es el número de veces que un televidente ve un determinado comercial. Para que un comercial tenga efectividad máxima: ¿Cuántas veces lo debería ver un televidente?

14. Si se lanza una pelota a una velocidad de 128 metros por segundo y su altura — *en metros* — al cabo de t segundos viene dada por la función:
$$A(t) = -16t^2 + 128t$$
¿Cuántos segundos tarda la pelota en alcanzar su altura máxima? ¿Cuál es dicha altura?

15. Determinar él o los puntos de intersección entre las siguientes rectas y parábolas. Haga un gráfico ilustrativo en cada uno de ellos.

a)
$$f(x) = 3x^2 + 2x + 1 \qquad g(x) = 4x + 2$$

b)
$$f(x) = -2x^2 + x + 1 \qquad g(x) = -3x + 3$$

c)

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 \qquad\qquad g(x) = 2x - 3$$

16. Juan se encuentra viajando con velocidad constante igual a $170\frac{km}{h}$ por una ruta cuya velocidad máxima permitida es de $130\frac{km}{h}$. En un control policial, un patrullero detenido sobre la banquina lo observa pasar a gran velocidad, motivo por el cual inicia una persecución con una aceleración de $60\frac{m}{s^2}$. Tenga presente que la ecuación de posición en función del tiempo de un móvil que se mueve a velocidad constante v_0 está dada por:

$$f(t) = v_0 \cdot t$$

y que la posición en función del tiempo de un móvil que se mueve con aceleración constante a está dada por:

$$g(t) = at + \frac{1}{2}at^2$$

¿En qué momento el patrullero intercepta al infractor? Si el control policial se encontraba en el kilómetro 135 de la ruta: ¿En qué lugar de la misma el patrullero se encuentra con Juan?

14.3. Teoría Complementaria

En la teoría básica hemos visto que para entender el comportamiento de una función cuadrática es fundamental determinar el vértice de la parábola que describe su gráfico, ya que por ejemplo a partir de él podemos determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, su imagen, si el gráfico interseca al eje x, etc...

Vimos que si f es una función cuadrática que está escrita en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ entonces las coordenadas x_v e y_v del vértice $V = (x_v, y_v)$ de la parábola se determinaban de la forma:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \qquad\qquad y_v = f(x_v)$$

A continuación veremos una manera alternativa de determinar x_v siempre que f tenga raíces reales.

Definición 14.3.1. Si x_1 y x_2 son dos números reales, definimos su promedio como:

$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$

Si tenemos una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ que posea alguna raíz real, necesariamente $b^2 - 4ac \geq 0$.

- Si $b^2 - 4ac = 0$, f tiene una única raíz real:

  $$x_1 = -\frac{b}{2a}$$

  En este caso podemos escribir:

  $$f(x) = a(x - x_1)^2$$

  y $x_v = x_1 = \frac{x_1 + x_1}{2}$.

- Si $b^2 - 4ac > 0$, f tiene dos raíces reales distintas que vienen dadas por:

  $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  y podemos escribir:

  $$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

  En este caso x_v se puede determinar como el promedio de las raíces de f, es decir:

  $$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

  ya que las raíces equidistan del eje de simetría $x = x_v$.

Ejemplo 14.3.1. Si $f(x) = x^2 - 1$, sus raíces son $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$. Pero entonces el promedio entre ambas es:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0$$

Aplicación

Ejercicio 14.3.1. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 3(x-1)(x+4)$

Solución:

Observemos que como $a = 3 > 0$, el gráfico de f es una parábola cuyas ramas se abren hacia arriba. Entonces f es decreciente en el intervalo $(-\infty, x_v)$ y creciente en el intervalo $(x_v, +\infty)$.

Entonces para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, debemos determinar x_v. En este caso, las raíces de f son $x_1 = -4$ y $x_2 = 1$, por lo tanto:

$$x_v = \frac{-4 + 1}{2} = -\frac{3}{2}$$

Luego: El intervalo de crecimiento de f es $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ y el intervalo de decrecimiento de f es $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$.

Ejercicio 14.3.2. Hallar la fórmula de una función cuadrática cuyo gráfico pasa por los puntos $(-1, 0)$, $(3, 0)$ y su imagen es el intervalo $(-\infty, 3]$.

Solución:

Observemos que $(-1, 0)$ y $(3, 0)$ deben ser puntos del gráfico de la función f que queremos determinar, por lo tanto, debe ser:

$$f(-1) = 0 \qquad\qquad f(3) = 0$$

Entonces la función que queremos determinar se puede escribir en la forma $f(x) = a(x+1)(x-3)$, con $a \neq 0$. Sabemos que la imagen de f está determinada por la coordenada y_v del vértice $V = (x_v, y_v)$. Pero entonces:

$$x_v = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

y por lo tanto:

$$y_v = f(x_v) = f(1) = a \cdot 2 \cdot (-2) = -4a$$

Como queremos que $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 3]$, debe ser $y_v = 3$.

Pero entonces:

$$-4a = y_v = 3 \Leftrightarrow \boxed{a = -\frac{3}{4}}$$

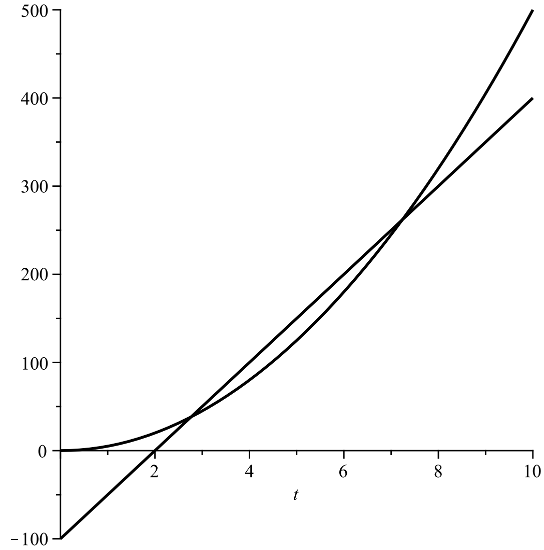
Luego: La función buscada es:

$$f(x) = -\frac{3}{2}(x+1)(x-3)$$

14.3.1. Intersección entre Recta y Parábola

Una interesante aplicación de Funciones Cuadráticas es el cálculo de la intersección entre los gráficos de una recta y una parábola. A modo de ejemplo de cómo puede surgir naturalmente la necesidad de calcular él o los puntos de intersección entre una recta y una parábola, imaginemos la siguiente situación problemática concreta:

Figura 14.3.1: INTERSECCIÓN ENTRE RECTA Y PARÁBOLA



En la figura pueden apreciarse las funciones $f(t) = 5t^2$ y $g(t) = 50(t-2)$ que representan la posición en función de tiempo de dos móviles, el primero moviéndose con aceleración constante de $10\frac{m}{s^2}$ y el segundo con velocidad constante de $50\frac{m}{s}$. Como puede observarse, ambos vehículos se encuentran en dos momentos de tiempo diferentes. El primero cuando el segundo vehículo alcanza al primero, y el segundo cuando el primer vehículo vuelve a toparse con el primero, luego de algún período de tiempo.

- Un móvil se mueve con aceleración constante de $10\frac{m}{s^2}$ partiendo del reposo en dirección hacia una ciudad A, sabiéndose que su posición en función del tiempo t está dada por la siguiente función cuadrática:

  $$f(t) = 5\frac{m}{s^2}t^2$$

  Luego de un minuto parte otro móvil que se mueve con velocidad constante $50\frac{m}{s}$ hacia el mismo lugar que el primero, siendo esta vez su posición en función del tiempo:

  $$g(t) = 50\frac{m}{s}(t-60)$$

  ¿Alcanza el segundo móvil al primero en algún momento? Si lo alcanzara: ¿En qué momento y lugar lo hace? ¿Se vuelven a encontrar dichos vehículos en otro momento? Si es así, explique por qué. Justifique.

  Solución:

  El problema anterior es un típico problema de encuentro entre dos vehículos, uno moviéndose con M.R.U.V[1] y el otro moviéndose con M.R.U[2]. Observemos que la función f que gobierna el movimiento del primer vehículo es una función cuadrática, mientras que la función g que gobierna el movimiento del segundo vehículo es una función lineal. Si representamos ambas funciones en un mismo sistema de ejes coordenados — *ver* FIG. 14.3.1 — podremos observar que ambas funciones se cortan en dos momentos de t diferentes.

  El segundo vehículo parte con velocidad superior al primero, y ésta es la razón del primer encuentro, luego de un lapso de tiempo t_1 desconocido hasta ahora por nosotros, pero el cual se observa ocurre entre los 2 y 3 segundos de marcha del primero. Como el primer vehículo aumenta su velocidad uniformemente debido a que su movimiento es acelerado, al cabo de un tiempo logra alcanzar una velocidad superior al segundo vehículo, y tarde o temprano se encuentra con él nuevamente, digamos en el tiempo t_2, entre los 6 y 7 segundos de marcha aparentemente.

  Para lograr establecer fehacientemente los momentos y lugares de encuentro de ambos vehículos, debemos resolver la ecuación de encuentro, que resulta de plantear la igualdad entre las dos funciones:

  $$f(t) = g(t)$$

[1]Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado.
[2]Movimiento Rectilíneo Uniforme.

Si procediéramos de aquella manera, obtendremos:

$$5t^2 = 50t - 100$$

o lo que es lo mismo:

$$5t^2 - 50t + 100 = 0$$

La última es una ecuación cuadrática cuyas soluciones sabemos calcular, mediante la fórmula resolvente:

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= \frac{-(-50) \pm \sqrt{(-50)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 100}}{2 \cdot 5} \\ &= \frac{50 \pm \sqrt{500}}{10} \\ &= \frac{50}{10} \pm \frac{10\sqrt{5}}{10} \\ &= 5 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

Pero entonces los momentos de encuentro son:

$$\begin{aligned} t_1 &= \left(5 - \sqrt{5}\right) s \approx 2{,}76s \\ t_2 &= \left(5 + \sqrt{5}\right) s \approx 7{,}24s \end{aligned}$$

Para obtener las posiciones de encuentro, simplemente evaluamos la función $f(t)$ o $g(t)$ en los tiempos de encuentro[3], obteniendo:

$$\begin{aligned} x_1 &= g(t_1) = 50\left[\left(5 - \sqrt{5}\right) - 2\right] m \approx 38{,}2m \\ x_2 &= g(t_2) = 50\left[\left(5 + \sqrt{5}\right) - 2\right] m \approx 261{,}8m \end{aligned}$$

Luego: Los puntos de encuentro entre los gráficos de $f(t)$ y $g(t)$ son:

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(5 - \sqrt{5}, 150 - 50\sqrt{5}\right) \\ P_2 &= \left(5 + \sqrt{5}, 150 + 50\sqrt{5}\right) \end{aligned}$$

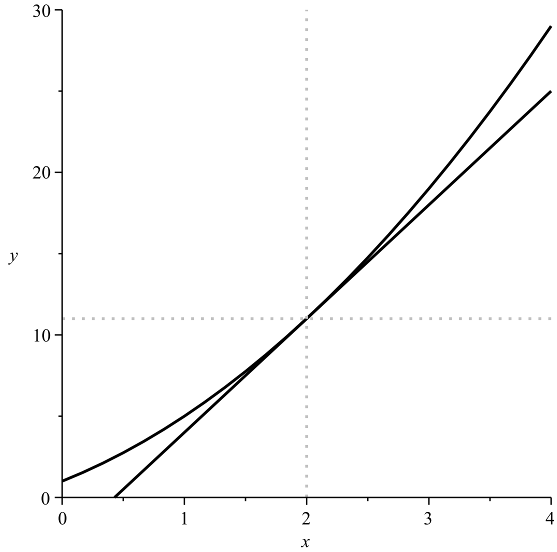
y significa que ambos vehículos se encuentran dos veces, la primera a los $5 - \sqrt{5}$ a una distancia de $150 - 50\sqrt{5}$ metros del punto de partida, y la segunda a los $5 + \sqrt{5}$ segundos a una distancia de $150 + 50\sqrt{5}$ metros del punto de partida.

El ejemplo anterior muestra una posible situación concreta donde surge naturalmente la necesidad de plantear la intersección entre una recta y una parábola, en la cual se produjeron dos puntos de intersección. Sin embargo, aquella no es la única posibilidad, ya que al plantear dicha intersección podrían darse tres situaciones bien diferenciadas:

- La recta y la parábola se cruzan en dos puntos diferentes del gráfico, situación que se corresponde a la del primer ejemplo.
- La recta y la parábola se cortan únicamente en un sólo punto. En este caso la recta se dice *tangente* a la parábola.
- La recta y la parábola nunca se cortan.

[3]Observemos que por tratarse de momentos de encuentro de ambas funciones, da lo mismo evaluar f o g en los tiempos de encuentro para obtener las respectivas posiciones donde ocurre dicho encuentro. Por lo general, para ahorrar cálculos conviene evaluarlos en la función lineal.

Figura 14.3.2: INTERSECCIÓN ENTRE RECTA Y PARÁBOLA



En la figura puede observarse que el único punto de intersección entre la función cuadrática $f(x) = x^2 + 3x + 1$ y la función lineal $g(x) = 7x - 3$ es $P = (2, 11)$.

Para ilustrar los dos últimos casos, haremos dos ejemplos más.

Ejemplo 14.3.2. Sean las funciones:

$$f(x) = x^2 + 3x + 1 \qquad\qquad g(x) = 7x - 3$$

Determine él o los puntos de intersección entre ambas funciones. Haga un gráfico ilustrativo.

Solución:

Para plantear el punto de intersección entre las dos funciones, procedemos como en el ejemplo del principio, igualando las fórmulas de dichas funciones:

$$x^2 + 3x + 1 = 7x - 3$$

Restando $7x - 3$ a ambos miembros, resulta:

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

Mediante la fórmula resolvente resolvemos la ecuación cuadrática anterior:

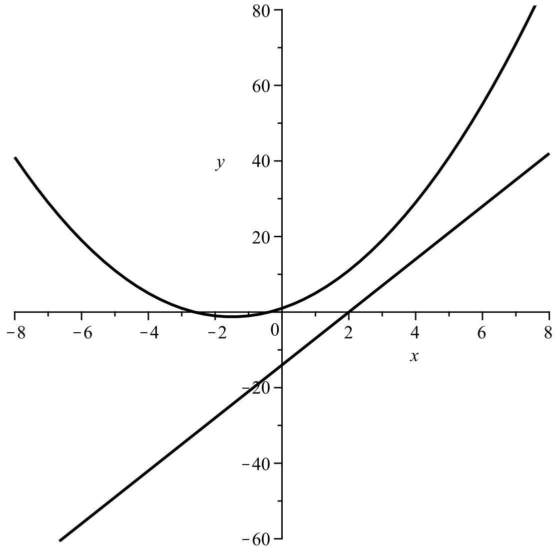
$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = 2 \end{aligned}$$

Como vemos, en este caso hay un único punto de intersección, cuya coordenada $x = 2$. Para determinar la coordenada y del punto $P = (x, y)$, simplemente evaluamos cualquiera de las funciones f o g en $x = 2$. Por comodidad lo haremos en la lineal, siendo:

$$y = g(2) = 11$$

Luego: Hay un único punto de intersección entre los gráficos de f y g, el cual es $P = (2, 11)$ — *ver* FIG. 14.3.2.

Figura 14.3.3: Intersección entre Recta y Parábola



En la figura puede observarse que la función cuadrática $f(x) = x^2 + 3x + 1$ y la función lineal $g(x) = 7x - 3$ no se cortan en ningún punto.

Ejemplo 14.3.3. Sean las funciones:

$$f(x) = x^2 + 3x + 1 \qquad\qquad g(x) = 7x - 14$$

Determine él o los puntos de intersección entre ambas funciones. Haga un gráfico ilustrativo.

Solución:

Para plantear el punto de intersección entre las dos funciones, procedemos como en el ejemplo del principio, igualando las fórmulas de dichas funciones:

$$x^2 + 3x + 1 = 7x - 14$$

Restando $7x - 14$ a ambos miembros, resulta:

$$x^2 - 4x + 15 = 0$$

Mediante la fórmula resolvente resolvemos la ecuación cuadrática anterior:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{-44}}{2} \nexists \text{ en } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Como vemos, en este caso la intersección entre la función cuadrática y la función lineal es vacía.

Luego: La recta y la parábola no se cruzan nunca — *ver* Fig. 14.3.3.

Capítulo 15

Funciones Polinómicas

15.1. Teoría Básica

15.1.1. Motivación

Cabe preguntarse para qué sirven este tipo de funciones llamadas polinómicas. Veamos algunos ejemplos:

En la Física: Sabemos que al suspender el peso de un resorte, éste se alarga. Una función polinómica podría servirnos para expresar el alargamiento del resorte en función del tiempo.

En la Química: Una función polinómica se utiliza por ejemplo para estudiar la temperatura de una masa de agua en función del tiempo en que es sometida al calor.

En la Economía: Un economista suele expresar mediante funciones polinómicas el consumo en función del ingreso, la oferta en función del precio, o el costo total de una empresa en función de los cambios de producción.

En la Biología: Se las suele utilizar por ejemplo para precisar el crecimiento de una población animal o vegetal en función del tiempo, el consumo de oxígeno en función de un trabajo realizado, etc...

Como vemos, las funciones polinómicas son de gran utilidad para entender fenómenos de la vida cotidiana. A continuación definimos la expresión algebraica de una función polinómica.

En este capítulo hemos estudiado funciones tales como:

$$f(x) 2x + 3 \qquad\qquad g(x) 3x^2 - 7x + 2$$

etc... Estas funciones son ejemplos de funciones polinómicas, pero en general tenemos la siguiente:

Definición 15.1.1. Una función f se dice *función polinómica* si se puede escribir en la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y n un entero no negativo — *es decir, $n \in \mathbb{N}_0$*. Es decir, si su forma algebraica es un polinomio.

- Si $a_n \neq 0$, diremos que la función polinómica tiene *grado n*, notándolo de la siguiente forma:

$$\operatorname{Gra}(f) = n$$

- Los números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se llaman *coeficientes* de la función polinómica — *n es la potencia más grande a la que aparece elevada la variable x en la escritura del polinomio.*

- El número a_0 es el *coeficiente constante* o *término independiente* de la función.
- El número a_n es el *coeficiente principal* y el término $a_n x^n$ es el *término principal* de la función.

Veamos algunos ejemplos:

1. $f(x) = \sqrt{2}$ es una función polinómica de grado 0, pues $a_0 = \sqrt{2}$.
2. $f(x) = 3x + 1$ es una función polinómica de grado 1, con $a_1 = 3$ y $a_0 = 1$.
3. $f(x) = x^2 - 7x$ es una función polinómica de grado 2, con $a_2 = 1$, $a_1 = -7$ y $a_0 = 0$.
4. $f(x) = -2 + 3x^2$ es una función polinómica de grado 2, ya que puede escribirse en la forma:
$$f(x) = 3x^2 - 2$$
— *en este caso* $a_2 = 3$, $a_1 = 0$ *y* $a_0 = -2$.
5. $f(x) = x^3$ es una función polinómica de grado 3.

Nota: Por convención, a la función polinómica $f(x) = 0$ no le asignaremos grado. Dicha función se llama *polinomio nulo*.

15.1.2. Operaciones con funciones polinómicas

Sean f y g funciones polinómicas. Definimos las siguientes operaciones:

Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Por ejemplo, si $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$ y $g(x) = 2x^2 + 8x - 2$, entonces:

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= \left[3x^2 + 5x - 7\right] + \left[2x^2 + 8x - 2\right] \end{aligned}$$

Para llegar a la expresión de función polinómica que dimos como definición, identificamos los términos de la expresión que obtuvimos en las que la variable x aparece elevada a la misma potencia y los agrupamos. En este caso:

- $3x^2$ y $2x^2$ son los términos en que x aparece elevada al cuadrado.
- $5x$ y $8x$ son los términos en que x aparece elevada a la potencia 1.
- -7 y -2 son los términos en que x aparece elevada a la potencia 0 — *es decir, en los que x no aparece*.

Una vez agrupados, obtenemos la expresión:

$$(f + g)(x) = \left(3x^2 + 2x^2\right) + (5x + 8x) + (-7 - 2)$$

A continuación, sumamos los coeficientes en los que x aparece a la misma potencia y al resultado de dicha suma lo multiplicamos por x a la potencia en la que aparecía. Procediendo de la manera antes descripta, resulta:

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= (3 + 2)x^2 + (5 + 8)x + (-7 - 2) \\ &= 5x^2 + 13x - 9 \end{aligned}$$

Resta: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

Por ejemplo, si $f(x) = 2x^3 - 5x + 1$ y $g(x) = x^2 + 3x$, entonces:

$$\begin{aligned}(f-g)(x) &= f(x) - g(x)\\ &= \left[2x^3 - 5x + 1\right] - \left[x^2 + 3x\right]\end{aligned}$$

El menos delante del corchete altera el signo de los coeficientes que aparecen en el cuarto y quinto término, entonces obtenemos:

$$(f-g)(x) = 2x^3 - 5x + 1 - x^2 - 3x$$

Ahora, procedemos como hicimos en el ejemplo anterior con la suma:

$$\begin{aligned}(f-g)(x) &= 2x^3 - 5x + 1 - x^2 - 3x\\ &= 2x^3 - x^2 + (-5-3)\,x + 1\\ &= 2x^3 - x^2 - 8x + 1\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$(f-g)(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 1$$

Producto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Por ejemplo, si $f(x) = 3x^2 + 2$ y $g(x) = x^2 - 3x$, entonces:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\\ &= \left(3x^2 + 2\right) \cdot \left(x^2 - 3x\right)\end{aligned}$$

A continuación aplicamos la propiedad distributiva como hacíamos con los números reales, resultando:

$$(f \cdot g)(x) = 3x^2 \cdot x^2 + 3x^2 \cdot (-3x) + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot (-3x)$$

Ahora en cada término sumamos los exponentes a los que aparece elevada x y utilizamos la conmutatividad del producto para obtener el coeficiente de cada término, resultando:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= 3x^{2+2} + 3 \cdot (-3)\,x^{2+1} + 2x^2 + 2 \cdot (-3)\,x\\ &= 3x^4 - 9x^3 + 2x^2 - 6x\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$(f \cdot g)(x) = 3x^4 - 9x^3 + 2x^2 - 6x$$

División: La división es similar a como dividíamos dos enteros positivos.

Por ejemplo cuando dividíamos 30 por 7, el cociente es 4 y el resto es 2. Podemos escribir:

$$30 = 4 \cdot 7 + 2$$

Veamos como proceder para dividir funciones polinómicas, mediante un ejemplo, efectuando la división entre:

$$\begin{aligned}f(x) &= -x^2 + 3x^3 + 4\\ g(x) &= x^2 + 1\end{aligned}$$

1. Ordenamos la función polinómica f en forma descendente según sus potencias de x, completando las potencias faltantes, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}f(x) &= 3x^3 - x^2 + 0x + 4\\ g(x) &= x^2 + 0x + 1\end{aligned}$$

Utilizaremos la siguiente notación para efectuar la división:

$$3x^3 - x^2 + 0x + 4 \;\big|\; \underline{x^2 + 0x + 1}$$

2. Dividimos $3x^3$ — *el primer término del dividendo* — por x^2 — *primer término del divisor* — y obtenemos $3x$, el primer término del cociente.
3. Multiplicamos $3x$ por $x^2 + 0x + 1$ — *el divisor* — obteniendo como resultado $3x\left(x^2 + 0x + 1\right) = 3x^3 + 0x^2 + 3x$ y escribimos dicho resultado debajo del dividendo.
4. Restamos $3x^3 - x^2 + 0x + 4$ — *el dividendo* — con $3x^3 + 0x^2 + 3x$ — *el resultado del producto de* $3x$ *con* $x^2 + 0x + 1$ — y obtenemos $-x^2 - 3x$. Por último bajamos el 4 y como nuevo dividendo tenemos a $-x^2 - 3x + 4$.

   El procedimiento anterior resulta en:

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & \cancel{3x^3} & - & x^2 & + & 0x & + & 4 & \big|\ \underline{x^2 + 0x + 1} \\
- & \cancel{3x^3} & + & 0x^2 & + & 3x & & & \qquad 3x \\ \cline{2-6}
 & & & -x^2 & - & 3x & + & 4 &
\end{array}$$

Ahora repetimos los 4 pasos, teniendo como nuevo dividendo a $-x^2-3x+4$ y el mismo divisor x^2+0x+1, entonces:

1. Nuestro dividendo ya está ordenado.
2. Dividimos $-x^2$ — *primer término del nuevo dividendo* — por x^2 — *primer término del divisor* — y obtenemos -1 — *el segundo término del cociente*.
3. Multiplicamos -1 por $x^2 + 0x + 1$, obtenemos $-x^2 - 1$ y escribimos $-x^2 - 1$ debajo del nuevo dividendo $-x^2 - 3x + 4$.
4. Restamos $-x^2 - 3x + 4$ con $-x^2 - 1$ y obtenemos $3x + 5$ como nuevo dividendo.
5. Observamos que el grado de $-3x + 5$ es 1, que es menor que el grado del divisor, y entonces la división termina, es decir, $r(x) = -3x + 5$ es el resto de la división y $q(x) = 3x - 1$ el cociente.

Resumiendo todo en forma esquemática, se tiene:

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & \cancel{3x^3} & - & x^2 & + & 0x & + & 4 & \big|\ \underline{x^2 + 0x + 1} \\
- & \cancel{3x^3} & + & 0x^2 & + & 3x & & & \qquad 3x - 1 \\ \cline{2-6}
 & & & \cancel{-x^2} & - & 3x & + & 4 & \ \uparrow\text{Cociente} \\
 & & - & \cancel{-x^2} & + & 0x & - & 1 & \\ \cline{4-8}
 & & & & & -3x & + & 5 & \ \leftarrow \text{Resto}
\end{array}$$

Teniendo presente que según el esquema:

$$\begin{array}{r|l} f(x) & g(x) \\ \cline{2-2} r(x) & q(x) \end{array}$$

entonces podemos escribir:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

En el ejemplo, sería:

$$3x^3 - x^2 + 4 = \left(x^2 + 1\right) \cdot (3x - 1) + (-3x + 5)$$

Recordemos que cuando dividíamos un entero positivo p por otro entero positivo s, obteníamos un único cociente q y un único resto r que satisfacen:

$$p = s \cdot q + r, \text{ con } 0 \leq r < s$$

En las funciones polinómicas, tenemos un resultado análogo llamado Algoritmo de División para funciones polinómicas, el cual se enuncia como sigue:

15.1.3. Algoritmo de división para funciones polinómicas

Sean f y g funciones polinómicas con $g \neq 0$ — *es decir, g no es la función constantemente cero*. Entonces existen únicas funciones polinómicas $q(x)$ y $r(x)$ tales que:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

donde $r(x) = 0$ o $\text{Gra}(r) < \text{Gra}(g)$.

- Llamamos a f el *dividendo*, a q el *cociente* y a r el *resto* de la división.
- Cuando $r = 0$, entonces $f(x) = g(x) \cdot q(x)$, en ese caso, decimos que g es un *factor* de f y que *f es divisible por g* o que *f divide a g*, notándolo de la siguiente forma:

  $$f \mid g$$

  Es decir, f divide a g — $f \mid g$ — si $\exists$ una función polinómica q tal que:

  $$f(x) = g(x) \cdot q(x)$$

Ejemplo 15.1.1. Dividamos la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ por $g(x) = x^2 - 1$ y veamos que g es un factor de f.

En efecto, al realizar la división de f por g obtenemos:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & \cancel{x^3} & - & 3x^2 & - & x & + & 3 & & x^2-1 \\ \cline{10-10}
- & \cancel{x^3} & + & 0x^2 & - & x & & & & x-3 \\ \cline{2-6}
 & & & \cancel{-3x^2} & + & 0x & + & 3 & & \uparrow\text{Cociente} \\
 & & - & \cancel{-3x^2} & + & 0x & + & 3 & & \\ \cline{4-9}
 & & & & & & & \boxed{0} & & \leftarrow \text{Resto}
\end{array}$$

Entonces, por el algoritmo de división para funciones polinómicas, podemos escribir $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, es decir:

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = \left(x^2 - 1\right) \cdot (x - 3) + 0$$

y por lo tanto:

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = \left(x^2 - 1\right) \cdot (x - 3)$$

y en consecuencia g es un factor de f.

Observación 15.1.1. Sea f una función polinómica con $\text{Gra}(f) = n > 0$ y $g(x) = x - c$ con $c \in \mathbb{R}$, y obviamente $\text{Gra}(g) = 1$. Si dividimos f por g, por el algoritmo de división, existen únicas funciones polinómicas q y r tales que:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

donde $r(x) = 0$ o $\text{Gra}(r) < \text{Gra}(q) = 1$. Pero entonces $r(x) = 0$ o $\text{Gra}(r) = 0$. En ambos casos $r(x)$ es una función constante.

De esta forma se deduce el siguiente teorema, llamado TEOREMA DEL RESTO.

Teorema 15.1.1. *(Teorema del Resto) Sea $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ una función polinómica de grado $n > 0$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces existe una única función polinómica q d grado $n - 1$ y un único número real r tales que:*

$$f(x) = (x - c) \cdot q(x) + r$$

Más aún: $r = f(c)$.

Nota: El TEOREMA DEL RESTO es de gran utilidad porque nos permite calcular el resto de una división sin tener que realizarla y anticipar si la división es exacta en caso de que el resto sea cero.

Ejemplo 15.1.2. Sean $f(x) = x^3 - 4x + 4$ y $g(x) = x + 1 = x - (-1)$. Observemos que el $\text{Gra}(f) = 3$. Si dividimos f por g con el algoritmo usual, obtenemos:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & \cancel{x^3} & - & 0x^2 & - & 4x & + & 4 & & x+1 \\ \cline{10-10}
- & \cancel{x^3} & + & x^2 & & & & & & x^2 - x - 3 \\ \cline{2-4}
 & & & \cancel{-x^2} & - & 4x & + & 4 & & \uparrow\text{Cociente} \\
 & & - & \cancel{-x^2} & - & x & & & & \\ \cline{4-6}
 & & & & & \cancel{-3x} & + & 4 & & \\
 & & & & - & \cancel{-3x} & - & 3 & & \\ \cline{6-8}
 & & & & & & & \boxed{7} & & \leftarrow \text{Resto}
\end{array}
$$

Entonces $x^3 - 4x + 4 = (x+1) \cdot \left(x^2 - x - 3\right) + 7$, además:

$$f(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1) + 4 = 7$$

Si llamamos $q(x) = x^2 - x - 3$, $r = 7$ y $c = -1$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{Gra}(q) &= 2 = 3 - 1 \\ f(x) &= (x - c) \cdot q(x) + r \end{aligned}$$

con $r = f(c)$, tal como afirma el Teorema del Resto.

Ahora que sabemos operar con funciones polinómicas, nuestro objetivo es calcular sus raíces reales — *en caso de que existan* — y expresar la función de un modo conveniente, de tal manera que nos permita entender su comportamiento y graficarla de la forma más clara y precisa posible.

Empecemos recordando la definición de una raíz o cero de una función.

Definición 15.1.2. Si f es una función, decimos que $c \in \mathbb{R}$ es un *cero o raíz de f* si $f(c) = 0$.

Observación 15.1.2. Si f es una función polinómica y $c \in \mathbb{R}$ es una raíz de f, el Teorema del Resto nos dice que existe una función polinómica $q(x)$ y un número $r \in \mathbb{R}$ tal que podemos escribir:

$$f(x) = (x - c) \cdot q(x) + r$$

con $r = f(c)$. Pero como c es una raíz de f, tenemos que $f(c) = 0$ y entonces $r = 0$ y por lo tanto:

$$f(x) = (x - c) \cdot q(x)$$

Recíprocamente, si $x - c$ es un factor de f, entonces existe una función polinómica h tal que f se puede escribir en la forma:

$$f(x) = (x - c) \cdot h(x)$$

Si evaluamos en $x = c$ obtenemos:

$$f(c) = (c - c) \cdot h(c) = 0$$

Entonces $f(c) = 0$, es decir, c es raíz de f.

A partir de la observación anterior deducimos el siguiente:

Teorema 15.1.2. *(Del factor) Sea f una función polinómica y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces c es una raíz de f —* es decir $f(c) = 0$ *— si y sólo si $x - c$ es un factor de f. Es decir, existe una función polinómica q tal que $f(x) = (x - c) \cdot q(x)$, y por lo tanto el resto de dividir f por $(x - c)$ es cero.*

15.1.4. Aplicaciones de los teoremas del resto y del factor

Ejercicio 15.1.1.

1. Hallar el resto de dividir $f(x) = 3x^3 - x^2 + 1$ por $g(x) = x - 2$.
2. Sea $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Mostrar que $f(1) = 0$ y utilizar este hecho para factorizar f por completo.

Solución:

1. Para encontrar el resto de dividir $f(x) = 3x^3 - x^2 + 1$ por $g(x) = x - 2$, podríamos realizar la división y ver que obtenemos. Pero en este caso, como g se escribe en la forma $g(x) = x - c$, con $c = 2$, el Teorema del Resto nos dice que el resto de la división es un número real que se obtiene evaluando f en $x = c = 2$, es decir:
$$r = f(2) = 3 \cdot 2^3 - 2^2 + 1 = 21$$
Entonces el resto de dividir $f(x) = 3x^3 - x^2 + 1$ por $g(x) = x - 2$ es $r = 21$.

2. Veamos que $f(1) = 0$.

   En efecto:
$$\begin{aligned} f(1) &= 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 \\ &= 1 - 2 - 5 + 6 \\ &= -6 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$
Luego, $f(1) = 0$, es decir, 1 es raíz de f, y entonces el Teorema del Factor nos dice que existe una función polinómica q tal que f se puede escribir en la forma:
$$f(x) = (x - 1) \cdot q(x)$$
Ahora, el Teorema del Factor nos garantiza la existencia de la función polinómica q, pero no nos dice quién es. Sin embargo, observemos que podemos hallar q realizando la división de f por $x - 1$, ya que q sera el cociente de dicha división. Realizamos entonces la división de f por $x - 1$ para hallar q:
$$\begin{array}{cccccccc|l} & \cancel{x^3} & - & 2x^2 & - & 5x & + & 6 & \quad x - 1 \\ \cline{9-9} - & \cancel{x^3} & - & x^2 & & & & & x^2 - x - 6 \\ \cline{2-4} & & & \cancel{-x^2} & - & 5x & + & 6 & \uparrow\text{Cociente} \\ & & - & \cancel{-x^2} & + & x & & & \\ \cline{4-6} & & & & & \cancel{-6x} & + & 6 & \\ & & & & - & \cancel{-6x} & + & 6 & \\ \cline{6-8} & & & & & & & \boxed{0} & \leftarrow \text{Resto} \end{array}$$
Entonces:
$$f(x) = (x - 1) \cdot \left(x^2 - x - 6\right)$$
es decir, $q(x) = x^2 - x - 6$. Ahora bien, para factorizar a f completamente, necesitamos factorizar $q(x) = x^2 - x - 6$, pero entonces determinemos las raíces de q mediante la fórmula resolvente:
$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \quad x_1 = -2 \\ \searrow \quad x_2 = 3 \end{array}$$
Luego, las raíces de q son $x_1 = -2$ y $x_2 = 3$. Entonces podemos escribir q en la forma factorizada:
$$q(x) = 1\,(x - (-2))\,(x - 3) = (x + 2)(x - 3)$$
Por lo tanto, f se factoriza en la forma:
$$f(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$$

15.1.5. Raíces reales de las funciones polinomiales

Recordemos que teníamos como objetivo calcular las raíces reales de las funciones polinómicas. Esto se debe a que conociendo sus raíces podemos escribirlas en forma factorizada tal y como vimos recién. Veremos que para poder graficar de la forma mas sencilla y clara posible una función polinómica es fundamental escribirla en su forma factorizada.

15.1.6. Multiplicidad de una raíz

Consideremos la función polinómica:

$$f(x) = (x-1)^3 (x+2)$$

Observemos que las únicas raíces de f son 1 y -2, ya que $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)^3 (x+2) = 0$. Como el producto de 2 factores es cero solamente cuando alguno de los dos es cero, tenemos que:

$$(x-1)^3 (x+2) = 0$$

si y sólo si $(x-1)^2 = 0$ o $x+2 = 0$, es decir, si $x = 1$ o $x = -2$.

Si observamos el factor $(x-1)$ de f, ésta aparece elevado a la tercera potencia, y 3 es la potencia más alta a la cual aparece. Diremos entonces que 1 *es una raíz de multiplicidad* 3 *de* f. En cambio, la potencia más alta a la cual aparece el factor $(x+2)$ es 1, entonces decimos que -2 *es una raíz de multiplicidad* 1 *de* f.

En general, tenemos la siguiente:

Definición 15.1.3. Sea f una función polinómica, c una raíz de f y k un entero positivo. Diremos que *c es una raíz de multiplicidad k de f* si y sólo si $(x-c)^k$ es un factor de f y $(x-c)^{k+1}$ ya no es un factor de f, es decir, si k es la mayor potencia a la cual aparece elevado el factor $(x-c)$ en la factorización de f.

Ejemplo 15.1.3.

1. Si $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, entonces 1 es raíz de multiplicidad 2.
2. Si $f(x) = (x-2)^2 (x-3)^3$, entonces 2 es raíz de multiplicidad 2 y 3 es raíz de multiplicidad 3.
3. Si $f(x) = (x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$, entonces f tiene dos raíces reales distintas de multiplicidad 1, que son $x = -1$ y $x = 1$.

Teorema 15.1.3. *Una función polinómica f de grado $n > 0$ tiene a lo sumo n raíces reales* — no necesariamente distinta.

Veamos algunos ejemplos:

1. *Si $f(x) = \left(x^2-1\right) \cdot \left(x^2+1\right)$, entonces éste polinomio tiene grado 4 y sólo dos raíces reales, a saber: $x = -1$ y $x = 1$.*
2. *Si $f(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$, entonces f tiene tres raíces reales, a saber $x = 1$, $x = 2$ y $x = -3$. Y su grado es 3.*

Veremos que la multiplicidad de las raíces también son importantes para graficar correctamente una función polinómica.

15.1.7. Regla de Ruffini

La Regla de Ruffini es una manera alternativa de realizar una división de una función polinómica f de grado $n > 0$, por una función polinómica g que se escriba en la forma $g(x) = x - c$, con $c \in \mathbb{R}$.

Por ejemplo, supongamos que queremos dividir $f(x) = 7x - 2x^3 + 1$ por $g(x) = x - 2$. Observemos que $g(x)$ se escribe de la forma $g(x) = x - c$ con $c = 2$. Ordenamos la función polinómica f de manera de escribirla en potencias descendentes de x y completando las potencias faltantes, con el coeficiente 0. Procediendo de esta forma con la función f, obtenemos:

$$f(x) = -2x^3 + 0x^2 + 7x + 1$$

Realizaremos la división en la forma tradicional, y con la Regla de Ruffini, y después explicaremos paso a paso como efectuar dicha regla.

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & \cancel{-2x^3} & + & 0x^2 & + & 7x & + & 1 & \multicolumn{1}{|c}{x-2} \\ \cline{9-9}
- & \cancel{-2x^3} & + & 4x^2 & & & & & -2x^2 - 4x - 1 \\ \cline{2-4}
 & & & \cancel{-4x^2} & + & 7x & + & 1 & \uparrow\text{Cociente} \\
 & & - & \cancel{-4x^2} & + & 8x & & & \\ \cline{4-6}
 & & & & & \cancel{-x} & + & 1 & \\
 & & & & - & \cancel{-x} & + & 2 & \\ \cline{6-8}
 & & & & & & & \boxed{-1} & \leftarrow \text{Resto}
\end{array}$$

Realicemos la división ahora mediante la Regla de Ruffini:

$$\begin{array}{rr|rrrrl}
 & & & & \text{Coef. del dividendo} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & -2 & 0 & 7 & 1 & \\
c \rightarrow & 2 & & -4 & -8 & -2 & \\ \cline{2-6}
 & & -2 & -4 & -1 & \boxed{-1} & \leftarrow \text{Resto} \\
 & & & \uparrow & & & \\
 & & & \text{Coef. del Cociente} & & &
\end{array}$$

Escribimos c en el primer lugar de la segunda fila y escribimos los coeficientes de f en la primera fila, obteniendo:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & -2 & 0 & 7 & 1 \\
2 & & & & \\ \hline
 & & & &
\end{array}$$

Bajamos el primer coeficiente de f a la tercera fila, en este caso, el coeficiente es -2.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & \mathbf{-2} & 0 & 7 & 1 \\
2 & \boldsymbol{\downarrow} & & & \\ \hline
 & \mathbf{-2} & & &
\end{array}$$

Multiplicamos dicho coeficiente por $c = 2$ y escribimos el producto en al segunda fila, debajo del segundo coeficiente de f. Luego sumamos los 2 números de esta columna y escribimos la suma debajo de ellos, en la tercera fila.

$$\begin{array}{c|cccc} & -2 & 0 & 7 & 1 \\ 2 & & -4 & & \\ \hline & -2 & -4 & & \end{array}$$

Multiplicamos esta suma — *en este caso* -4 — por c — *en este caso* $c = 2$ — y escribimos el producto en la segunda fila de la siguiente columna — *en este caso debajo del tercer coeficiente de* f. Luego sumamos los dos números en esta columna y escribimos la suma en la tercera fila:

$$\begin{array}{c|cccc} & -2 & 0 & 7 & 1 \\ 2 & & -4 & -8 & \\ \hline & -2 & -4 & -1 & \end{array}$$

Por último repetimos el paso anterior y completamos la segunda y tercera fila, obteniendo:

$$\begin{array}{c|cccc} & -2 & 0 & 7 & 1 \\ 2 & & -4 & -8 & -2 \\ \hline & -2 & -4 & -1 & \boxed{-1} \end{array} \leftarrow \text{Resto}$$

Entonces:

$$-2x^3 + 7x + 1 = (x-2) \cdot \left(-2x^2 - 4x - 1\right) + (-1)$$

es decir:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r$$

Sintetizamos el procedimiento de la REGLA DE RUFFINI para dividir una función polinómica f de grado $n > 0$ por $x - c$ de la siguiente manera:

1. Escribir c en el primer lugar de la tercera fila y los coeficientes de f en la primera fila. Recordar incluir cualquier coeficiente que sea 0, además del término constante.
2. Bajar el primer coeficiente de f a la tercera fila.
3. Multiplicar éste número por c y escribir el producto debajo del segundo coeficiente de f. Luego sumar los dos números en esta columna y escribir la suma debajo de ellos en la tercera fila.
4. Multiplicar por c dicha suma y escribir el producto en la segunda fila de la columna siguiente. Luego sumar los números en esta columna y escribir la suma en la tercera fila.
5. Repetir el paso anterior tantas veces como sea necesario.
6. El último número de la tercera fila es el resto constante r y los números que lo preceden en la tercera fila son los coeficientes de la función polinómica $q(x)$ de grado $n-1$, la cual es el cociente de la división de f por $x - c$.

Ejercicio 15.1.2. Utilizar la REGLA DE RUFFINI para dividir:

1. $f(x) = 2x^3 - 4x + 3$ por $g(x) = x - 3$.
2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ por $g(x) = x + 1 = x - (-1)$.

Solución:

1. Escribimos f en la forma:

$$f(x) = 2x^3 + 0x^2 - 4x + 3 \qquad\qquad g(x) = x - 3 \leftarrow \text{Con } c = 3$$

Aplicamos la Regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 0 & -4 & 3 \\ 3 & & 6 & 18 & 42 \\ \hline & 2 & 6 & 14 & \boxed{45} \end{array} \leftarrow \text{Resto}$$

Entonces el cociente de la división es $q(x) = 2x^2 + 6x + 14$ y el resto es $r = 45$.

2. Escribimos f en la forma:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 0x + 4 \qquad\qquad g(x) = x - c \leftarrow \text{Con } c = -1$$

Aplicamos la Regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \end{array} \leftarrow \text{Resto}$$

Entonces el cociente de la división es $q(x) = x^2 - 4x + 4$ y el resto es $r = 0$.

Observación 15.1.3. Como el resto es cero, tenemos que -1 es raíz de f, pues $r = f(-1) = 0$ y por lo tanto $(x + 1)$ es un factor de f, y podemos escribir:

$$f(x) = (x + 1) \cdot \left(x^2 - 4x + 4\right)$$

Dividamos $q(x) = x^2 - 4x + 4$ por $x - 2$ con la Regla de Ruffini, obteniendo:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -4 & 4 \\ 2 & & 2 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array} \leftarrow \text{Resto}$$

Luego el cociente de la división es $x - 2$ y el resto es cero. Entonces podemos escribir:

$$q(x) = (x - 2)(x - 2) = (x - 2)^2$$

Por lo tanto $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$. Deducimos entonces que $x = -1$ es raíz simple de f y $x = 2$ es raíz doble de f.

Como conclusión, podemos observar que la Regla de Ruffini es de gran utilidad para decidir si un número $c \in \mathbb{R}$ es raíz de una función polinómica f, así como también para determinar su multiplicidad y para factorizar la función.

15.1.8. Ceros racionales de una función polinómica

Consideremos la función polinómica $f(x) = 18x^3 - 15x^2 + 14x - 8$.

- El coeficiente principal es $a_3 = 18$.
- El término independiente es $a_0 = -8$.

Veamos mediante la Regla de Ruffini que $\frac{2}{3}$ es una raíz de f. En efecto, si dividimos $f(x)$ por $x - \frac{2}{3}$ con la Regla de Ruffini, tenemos:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 18 & -15 & 14 & -8 \\
\frac{2}{3} & & 12 & -2 & 8 \\
\hline
 & 18 & -3 & 12 & \boxed{0}
\end{array} \quad \leftarrow \text{Resto}$$

Entonces el cociente es $q(x) = 18x^2 - 3x + 12$ y el resto es $r = 0$.

Luego, $\frac{2}{3}$ es raíz de f y podemos escribir:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(x - \frac{2}{3}\right)\left(18x^2 - 3x + 12\right) \\
&= \left(x - \frac{2}{3}\right)3\left(6x^2 - x + 4\right) \\
&= (3x-2)\left(6x^2 - x + 4\right)
\end{aligned}$$

Observemos que el coeficiente principal 18 y el término independiente f se obtienen de los productos:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{3}x - 2)\left(\mathbf{6}x^2 - x + 4\right) &\to a_3 = 18 = 6 \cdot 3 \\
(3x\mathbf{-2})\left(6x^2 - x + \mathbf{4}\right) &\to a_0 = -8 = (-2) \cdot 4
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el denominador 3 de la raíz racional $\frac{2}{3}$ es un factor del coeficiente principal de f — *pues* $18 = 3 \cdot 6$ — y el numerador 2 de la raíz es un factor del término independiente de f — *pues* $-8 = 2 \cdot (-4)$.

Esta observación se generaliza en el teorema que motiva la sección siguiente.

15.1.9. Teorema de los ceros racionales

Teorema 15.1.4. *(De los ceros racionales) Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ una función polinómica de grado $n > 0$* — por lo tanto $a_n \neq 0$ — *donde los coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$ son número enteros. Si $\frac{p}{q}$ es una raíz racional irreducible de f, entonces p es un factor entero del término independiente a_0 y q es un factor entero del coeficiente principal a_n.*

Observación 15.1.4. *(Importante):* El Teorema de los Ceros Racionales no asegura que una función polinómica deba tener raíces racionales, sino que afirma que si una función polinómica con coeficientes enteros *tuviera* una raíz racional irreducible $\frac{p}{q}$, entonces:

- El numerador p es un factor entero de a_0.
- El denominador q es un factor entero de a_n.

15.1.10. Sugerencias para encontrar raíces racionales

1. Determinar los posibles ceros o raíces usando el Teorema de los Ceros Racionales .
2. Evaluar la función $f(x)$ en cada uno de los candidatos a ser raíz de la misma, para comprobar cuáles de ellos efectivamente lo son.
3. Aplicar la Regla de Ruffini en la raíz encontrada para factorizar la función $f(x)$ según:

$$f(x) = (x - c) \cdot q(x)$$

4. Repetir los pasos anteriores para el cociente $q(x)$. Parar cuando se llegue a un cociente $q(x)$ que sea una función cuadrática — *o que se factorice fácilmente* — y usar la formula resolvente o factorizar para hallar los demás ceros o raíces.

Ejercicio 15.1.3. Hallar todas las raíces racionales de la función polinómica $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 8x - 2$.

Solución:

En primer lugar observemos que f tiene coeficientes enteros:

$$a_4 = 3 \qquad a_3 = -4 \qquad a_2 = -5$$
$$a_1 = 8 \qquad a_0 = -2$$

Entonces si $\frac{p}{q}$ es una raíz racional de f, el Teorema de los Ceros Racionales nos dice que p es un factor entero de $a_0 = -2$ y q es un factor entero de $a_4 = 3$.

- Los posibles valores de p son: $\pm 1,\ \pm 2$.
- Los posibles valores de q son: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3$.

Luego, las posibles raíces racionales son:

$$\frac{p}{q} = \pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3}$$

Como $\mathrm{Gra}(f) = 4$, entonces f tiene a lo sumo 4 raíces reales y entonces de estas posibles 8 raíces, a lo sumo 4 de ellas lo serán.

Probemos con -1: Si -1 fuera raíz, por el teorema del resto debería ser $f(-1) = 0$. Pero:

$$f(-1) = 3(-1)^4 - 4(-1)^3 - 5(-1)^2 + 8(-1) - 2 = -8 \neq 0$$

Entonces descartamos a -1 como raíz de f.

Probemos con 1: Si 1 fuera raíz de f, entonces por el teorema del resto debería ser $f(1) = 0$. Y como:

$$f(1) = 3 - 4 - 5 + 8 - 2 = 0$$

entonces efectivamente 1 es raíz de f.

Ahora dividamos f por $x + 1$ mediante la Regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 3 & -4 & -5 & 8 & -2 \\
1 & & 3 & -1 & -6 & 2 \\
\hline
 & 3 & -1 & -6 & 2 & \boxed{0}
\end{array} \leftarrow \text{Resto}$$

Entonces el cociente y resto son:

$$q(x) = 3x^3 - x^2 - 6x + 2 \qquad\qquad r = 0$$

Podemos escribir pues:

$$f(x) = (x+1)\left(3x^3 - x^2 - 6x + 2\right)$$

Ahora bien, las otras posibles raíces racionales de f deben ser raíces de $q(x) = 3x^3 - x^2 - 6x + 2$.

El lector puede verificar que $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{3}$ no son raíces de f, pero $\frac{1}{3}$ sí. Entonces aplicamos nuevamente la Regla de Ruffini pero esta vez a $q(x)$ con la raíz $x = \frac{1}{3}$:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & -1 & -6 & 2 \\
\frac{1}{3} & & 1 & 0 & -2 \\
\hline
 & 3 & 0 & -6 & \boxed{0}
\end{array} \quad \leftarrow \text{Resto}$$

Entonces el cociente es $3x^2 - 6$ y el resto es $r = 0$. Luego podemos escribir:

$$q(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(3x^2 - 6\right)$$

y extrayendo factor común 3 en el segundo factor de $q(x)$, podemos escribir:

$$f(x) = 3(x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x^2 - 2\right)$$

Ahora bien, $x^2 - 2$ es una función cuadrática cuyas raíces son claramente $\pm\sqrt{2}$, pudiendo escribir entonces:

$$x^2 - 2 = \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$$

Así:

$$f(x) = 3(x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$$

Como $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$ son números irracionales, entonces las raíces racionales de $f(x)$ son:

$$r_1 = 1 \qquad\qquad r_2 = \frac{1}{3}$$

15.1.11. Gráficos de funciones polinómicas a partir de sus raíces

Vimos que la Regla de Ruffini y el Teorema de los Ceros Racionales son importantes para hallar raíces de una función polinómica. Veamos ahora cómo proceder para graficar una función polinómica si conocemos sus raíces reales.

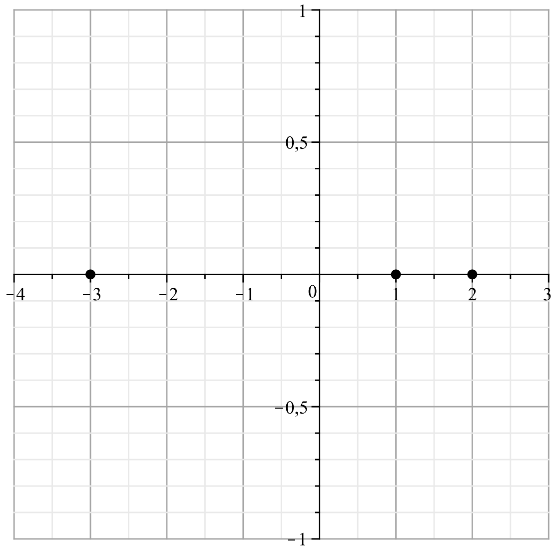
Ejemplo 15.1.4. Consideremos $f(x) = (x-1)(x+3)(x-2)$, queremos realizar un gráfico aproximado de f.

Para realizar dicho gráfico procedemos de la siguiente manera:

1. Marcamos sobre el eje x las raíces -3, 1 y 2 — *ver* Fig. 15.1.1.

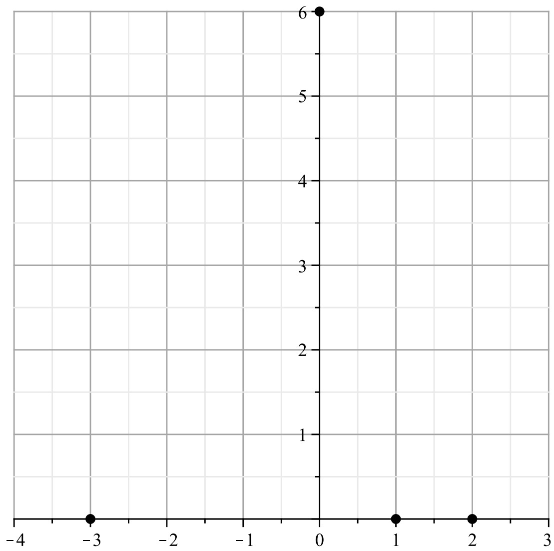
2. Calculamos ahora la ordenada al origen, así determinamos la intersección del gráfico de f con el eje y — *ver* Fig. 15.1.2.

Figura 15.1.1: Gráfico Aproximado - Paso 1



Lo primero que debemos hacer es marcar los puntos que corresponden a las raíces de $f(x) = (x-1)(x+3)(x-2)$.

Figura 15.1.2: Gráfico Aproximado - Paso 2



Ahora marcamos también la ordenada al origen.

3. A continuación, dividimos el dominio de la función en intervalos, los cuales quedarán determinados por las raíces. Ordenamos las raíces de menor a mayor, según se ordenan en la recta numérica y tomamos los intervalos que tienen como extremos a dichas raíces en el orden dado. Como en este caso las raíces son -3, 1 y 2, las ordenamos en la forma:

$$-3 < 1 < 2$$

y por lo tanto consideramos los intervalos:

$$(-\infty, -3) \qquad (-3, 1) \qquad (1, 2) \qquad (2, +\infty)$$

4. Ahora bien, para obtener un gráfico aproximado de la función debemos determinar los conjuntos de positividad y negatividad de la misma, los cuales son:

$$C^{+}(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$$
$$C^{-}(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\}$$

Para determinar dichos conjuntos averiguamos el signo de la función en los intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, +\infty)$. Para ello lo que haremos es elegir en cada caso un valor "a" conveniente del intervalo en el que queramos averiguar el signo de la función, evaluaremos dicha función en ese valor a y obtendremos el signo de $f(a)$.

- En $(-\infty, -3)$, elegimos $a = -2$ y analizamos el signo de $f(-2)$:

$$f(-2) = (-2-1)(-2+3)(-2-2) = -12 \Rightarrow \boxed{f(-2) < 0}$$

es decir el signo de $f(-2)$ es negativo, y por lo tanto el gráfico de la función en $(-\infty, -3)$ estará por debajo del eje x.

- En $(-3, 1)$, elegimos $a = 0$ y analizamos el signo de $f(0)$:

$$f(0) = (0-1)(0+3)(0-2) = 6 \Rightarrow \boxed{f(0) > 0}$$

es decir, el signo de $f(0)$ es positivo, y por lo tanto el gráfico de la función en $(-3, 1)$ estará por encima del eje x.

- En $(1, 2)$, elegimos $a = \frac{3}{2}$, entonces:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 1\right)\left(\frac{3}{2} + 3\right)\left(\frac{3}{2} - 2\right) = -\frac{9}{8} \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{3}{2}\right) < 0}$$

y por lo tanto el gráfico de la función en el intervalo $(1, 2)$ estará por debajo del eje x.

- Por último, en $(2, +\infty)$ elegimos $a = 3$ y analizamos el signo de $f(3)$:

$$f(3) = (3-1)(3+3)(3-2) = 8 \Rightarrow \boxed{f(3) > 0}$$

y por lo tanto el gráfico de la función en $(2, +\infty)$ estará por encima del eje x.

Podemos mostrar nuestro análisis en la siguiente tabla:

Intervalo	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
Punto elegido	-2	0	$\frac{3}{2}$	3
Signo de $f(a)$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$

Es decir:

$$C^{+}(f) = (-3, 1) \cup (2, +\infty)$$
$$C^{-}(f) = (-\infty, -3) \cup (1, 2)$$

Figura 15.1.3: GRÁFICO APROXIMADO - PASO 3

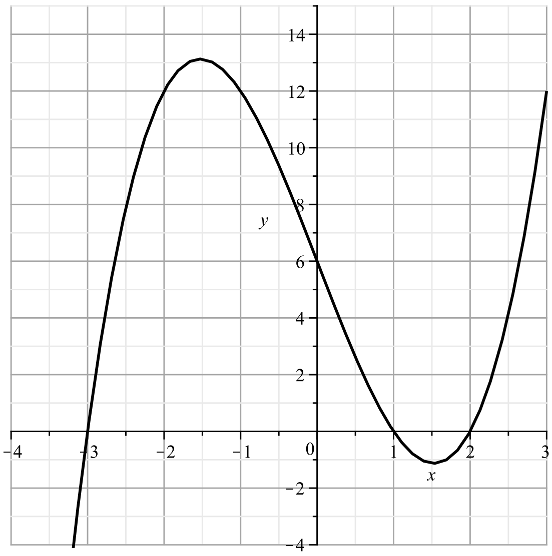


Gráfico aproximado de la función $f(x) = (x-1)(x+3)(x-2)$.

5. Prácticamente estamos en condiciones de dar un gráfico aproximado de la función, lo último que debemos tener en cuenta es la multiplicidad de cada raíz.

   Observación 15.1.5. *(Importante)* La curva que describe el gráfico de f corta al eje x en los puntos de la forma $(r, 0)$ donde r es una raíz de f

   - Si r es una raíz de f de multiplicidad *impar* , la curva *atraviesa* el eje x.
   - Si r es una raíz de f de multiplicidad *par*, la curva *rebota* sin atravesar el eje x.

   En este caso, las raíces -3, 1 y 2 de nuestra función son todas de multiplicidad 1, es decir, todas son de multiplicidad impar, y por lo tanto en los puntos $(-3, 0)$, $(1, 0)$ y $(2, 0)$ la curva atraviesa el eje x.

6. Ahora si, utilizando toda la información obtenida, podemos realizar el gráfico aproximado de f — *ver* FIG. 15.1.3.

Ejemplo 15.1.5. Sea $f(x) = x^3(x+1)(x-1)^2$, queremos dar un gráfico aproximado de f.

Las raíces de f son 0, -1 y 2.

1. Marcamos sobre el eje x las raíces 0, -1 y 2.

2. Calculamos la ordenada al origen $f(0) = 0$ y la representamos en el gráfico también.

3. Ordenamos las raíces de menos a mayor. Tenemos:

$$-1 < 0 < 2$$

   entonces los intervalos que debemos considerar son:

$$(-\infty, -1) \qquad (-1, 0) \qquad (0, 2) \qquad (2, +\infty)$$

4. Determinamos los conjuntos de positividad y negatividad de f:

   - En $(-\infty, -1)$ elegimos $a = -2$:

$$f(-2) = (-2)^3(-2+1)(-2-2)^2 = 32 \Rightarrow \boxed{f(-2) > 0}$$

- En $(-1, 0)$ elegimos $a = -\frac{1}{2}$:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \left(-\frac{1}{2} + 1\right)\left(-\frac{1}{2} - 2\right)^2 = -\frac{25}{64} \Rightarrow \boxed{f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0}$$

- En $(0, 2)$ elegimos $a = 1$:

$$f(1) = (1)^3 (1 + 1)(1 - 2)^2 = 2 \Rightarrow \boxed{f(1) > 0}$$

- En $(2, +\infty)$ elegimos $a = 3$:

$$f(3) = (3)^3 (3 + 1)(3 - 2)^2 = 108 \Rightarrow \boxed{f(3) > 0}$$

Tenemos la siguiente tabla:

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Punto elegido	-2	$-\frac{1}{2}$	1	3
Signo de $f(a)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$

Entonces:

$$C^+(f) = (-\infty, -1) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$$
$$C^-(f) = (-1, 0)$$

5. Analizamos la multiplicidad de las raíces:

   - La raíz $r = -1$ tiene multiplicidad 1 pues $(x + 1)$ aparece elevado a la 1 en la factorización de f. Entonces 1 tiene multiplicidad impar, luego la curva atraviesa el eje x en el punto $(1, 0)$.
   - La raíz $r = 0$ tiene multiplicidad 3 pues x aparece al cubo en la factorización de f. Pero entonces 0 tiene multiplicidad impar, y la curva atraviesa el eje x en el punto $(0, 0)$.
   - La raíz $r = 2$ tiene multiplicidad 2 pues $(x - 2)$ aparece elevado al cuadrado en la factorización de f. Pero entonces 2 tiene multiplicidad par y por ende la curva rebota sin atravesar el eje x en el punto $(2, 0)$.

6. Con esta información tenemos el siguiente gráfico aproximado de f — *ver* Fig. 15.1.4.

Ejemplo 15.1.6. Analicemos ahora un caso más general, correspondiente a la función $f(x) = x^n$ con $n \geq 3 \in \mathbb{N}$. En este caso la única raíz es $x = 0$ y es de multiplicidad n.

1. Marcamos sobre el eje x la raíz 0.

2. $f(0) = 0$.

3. Como la única raíz es cero, los intervalos a considerar son $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

4. Determinamos los conjuntos de positividad y negatividad, para lo cual tendremos que dividir el análisis en dos casos, según la paridad de n:

   a) **Si n es impar:** En $(-\infty, 0)$ elijo a $a = -1$, $f(-1) = (-1)^n = -1$ — *pues n es impar* — y entonces el signo de $f(-1)$ es negativo. En $(0, +\infty)$ elijo a $a = 1$ y por lo tanto $f(1) = 1^n = 1$, de donde el signo de $f(1)$ es positivo.

   Tenemos la siguiente tabla:

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Punto elegido	-1	1
Signo de $f(a)$	$\ominus$	$\oplus$

Figura 15.1.4: Gráfico Aproximado

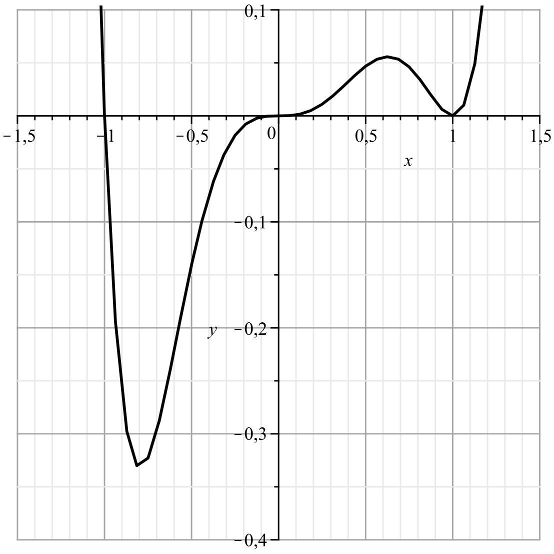


Gráfico aproximado de la función $f(x) = x^3 (x+1)(x-1)^2$.

Entonces:

$$C^+(f) = (0, +\infty)$$
$$C^-(f) = (-\infty, 0)$$

b) **Si n es par:** En $(-\infty, 0)$ elijo a $a = -1$, $f(-1) = (-1)^n = 1$ — *pues n es par* — y entonces el signo de $f(-1)$ es positivo. En $(0, +\infty)$ elijo a $a = 1$ y por lo tanto $f(1) = 1^n = 1$, de donde el signo de $f(1)$ es positivo.
Tenemos la siguiente tabla:

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Punto elegido	-1	1
Signo de $f(a)$	$\oplus$	$\oplus$

Entonces:

$$C^+(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$
$$C^-(f) = \emptyset$$

5. Analizamos la multiplicidad de la raíz cero. Ya sabemos que 0 es raíz de multiplicidad n.

   - Si n es impar, 0 será raíz de multiplicidad impar y por lo tanto la curva atraviesa al eje x en el punto $(0, 0)$.
   - Si n es par, 0 será raíz de multiplicidad par y por lo tanto la curva rebotará en el eje x en el punto $(0, 0)$.

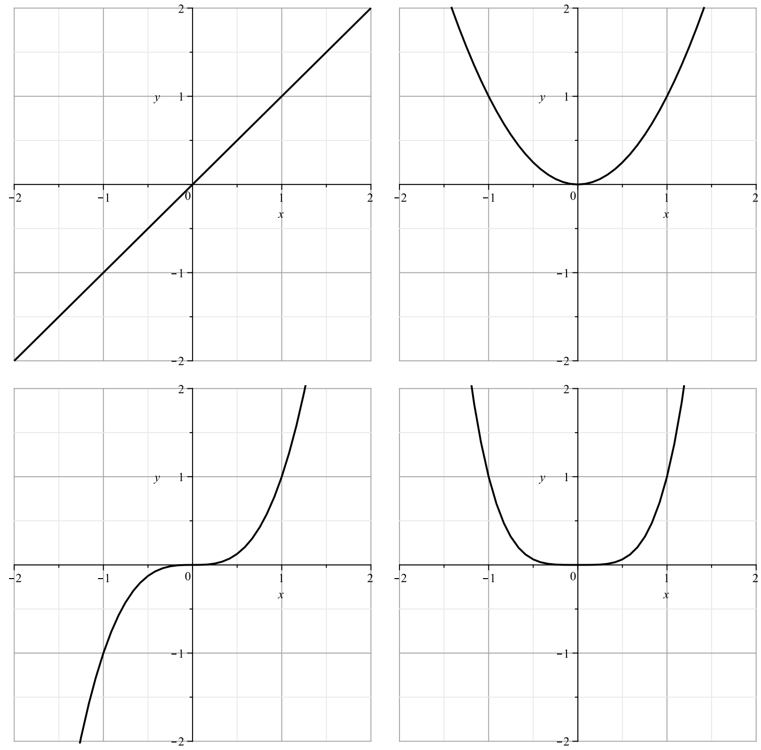
6. Entonces, si variamos n tenemos los siguientes gráficos aproximados — *ver* Fig. 15.1.5.

15.2. Ejercicios

1. Resuelva las siguientes sumas y restas:

   a) $5x + 7x - 7x^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$
   b) $2x^3 + 3x^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Figura 15.1.5: Gráficos Aproximados



Gráficos aproximados de las funciones:

$f_1(x) = x$ →Arriba izquierda. $f_3(x) = x^3$ →Abajo izquierda.

$f_2(x) = x^2$ →Arriba derecha. $f_4(x) = x^4$ →Abajo derecha.

c) $\left(-x^3+2x^2\right)-\left(x^3+2x^2\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots$
d) $\left(3x^2+4x\right)-\left(7x^2-x\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. Considere las funciones polinómicas:

$$f(x)=3x-x^3$$
$$g(x)=x^3-5x^2+2$$
$$h(x)=-x^4+2x^2+5x+3$$

y realice las siguientes operaciones:

a) $f(x)+g(x)$
b) $g(x)+h(x)$
c) $(f(x)+h(x))-(h(x)+g(x))$
d) $f(x)-(g(x)+h(x))$
e) $h(x)-g(x)-f(x)$
f) $f(x)+f(x)$

3. Resuelva los siguientes productos:

a) $\left(2x^2\right)\cdot\left(-5x^3\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots$
b) $\left(\frac{1}{3}x\right)\cdot\left(3x^2\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots$
c) $\left(-x^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}x^3\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots$
d) $\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2+1\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots$
e) $\left(3x^2-2x\right)\cdot\left(4x+5x^2\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots$

4. Considere las funciones polinómicas:

$$f(x)=x^2-3x$$
$$g(x)=x-4$$
$$h(x)=5x^3+\frac{1}{2}x^2+x$$

y realice las siguientes operaciones:

a) $f(x)\cdot g(x)$
b) $g(x)\cdot h(x)$
c) $g(x)\cdot f(x)$
d) $g(x)\cdot g(x)$
e) $f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)$
f) $g(x)\cdot f(x)+h(x)$
g) $(g(x)-f(x))\cdot h(x)$
h) $(f(x)-g(x))\cdot h(x)$

5. En cada caso realice la división de $f(x)$ por $g(x)$, llame $q(x)$ al cociente y $r(x)$ al resto y escriba f en la forma $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$.

a) $f(x)=2x^2-6x+2$ y $g(x)=x^2-3$.
b) $f(x)=x^3-x^2-3x+3$ y $g(x)=x^2-3$.
c) $f(x)=5x^2$ y $g(x)=x^3-2x^2$.

d) $f(x) = 3$ y $g(x) = x + 1$.

e) $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 8x - 1$ y $g(x) = (x + 1)^2$.

f) $f(x) = 3x^5 - 13x^3 + x - 2$ y $g(x) = x^2 - 2x + 2$.

6. En cada caso realice la división utilizando la Regla de Ruffini, llame $q(x)$ al cociente, $r(x)$ al resto y escriba f en la forma $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r$.

   a) $f(x) = 3x^2 + x - 2$ y $g(x) = x - 2$.

   b) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 3x + 3$ y $g(x) = x - 1$.

   c) $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 3x + \frac{1}{3}$ y $g(x) = x - \frac{1}{3}$.

   d) $f(x) = x^3 + x^2 + 15$ y $g(x) = x + 3$.

   e) $f(x) = x^4 - 81$ y $g(x) = 3 + x$.

   f) $f(x) = 18x^2 + 2x^4 + 4x^3 - 8x$ y $g(x) = -4 + x$.

   g) $f(x) = 16x^2 + 64 + x^2$ y $g(x) = x + 8$.

   h) $f(x) = 8x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$ y $g(x) = x - \frac{1}{4}$.

7. Utilice el Teorema del Resto para hallar el resto r de la división de $f(x)$ por $g(x)$ en cada caso y luego verifique usando la Regla de Ruffini que su respuesta es correcta.

   a) $f(x) = 5x^2 - 7x + 13$ y $g(x) = x - 3$.

   b) $f(x) = 9x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ y $g(x) = x - \frac{1}{3}$.

   c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ y $g(x) = x - \frac{3}{2}$.

   d) $f(x) = -x^7 + 2x^6 + x^5 + 3x - 5$ y $g(x) = x - 5$.

8. En cada caso, determine si $g(x)$ divide a $f(x)$.

   a) $f(x) = 3x^2 - 10x - 8$ y $g(x) = x - 4$.

   b) $f(x) = 12x^2 - 4x + 4$ y $g(x) = x - \frac{1}{6}$.

   c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 20x + 6$ y $g(x) = x - 3$.

   d) $f(x) = x^4 + 4x - \frac{1}{2}x^3 - 2$ y $g(x) = x - \frac{1}{2}$.

   e) $f(x) = 3x^4 + 6x^3 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 1$.

   f) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ y $g(x) = x + 2$.

9. Halle todas las raíces racionales de la función polinómica dada:

   a) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

   b) $f(x) = 3x^3 - 10x - 4$.

   c) $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$.

   d) $f(x) = 4x^3 + 12x^2 + 5x - 3$.

   e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

   f) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10$.

   g) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$.

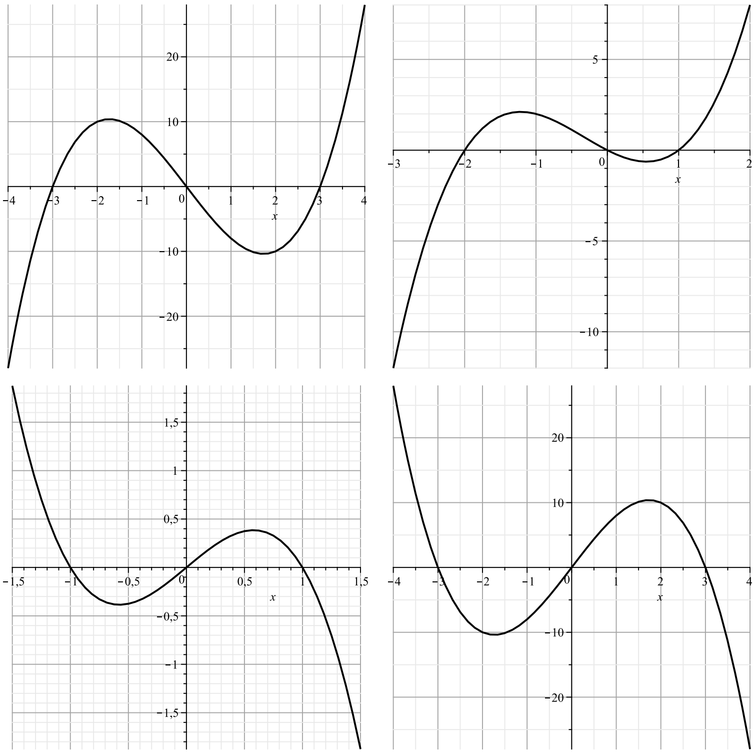
10. Si f es una función polinómica tal que:

    $$f(-2) = 2 \qquad f(0) = -1 \qquad f(2) = 3$$

    y los únicos ceros de f son -1 y 1, hallar los conjuntos de positividad y negatividad de f.

11. Hallar una función polinómica de grado 4 que cumpla:

Figura 15.2.1: Identificar cada gráfico con su Función



Gráficos aproximados de las funciones:

$f_1(x) = -x(x+3)(x-3)$ $\qquad$ $f_3(x) = x^3 - 9x$

$f_2(x) = x(x-1)(x+2)$ $\qquad$ $f_4(x) = -x(x-1)(x+1)$

a) $\frac{1}{2}$ es raíz de multiplicidad 2.
b) 3 y -2 son raíces.
c) $f(2) = 6$.

12. Sea $f(x) = 3x^4 + x^3 - 8x^2 + 4x$, encontrar las raíces de f si se sabe que $f(-2) = 0$, factorizarla y hacer un gráfico aproximado.

13. Grafique las siguientes funciones polinómicas:

a) $f(x) = x^2\left(x^2 - 1\right)$.
b) $f(x) = (1-x)(x-2)(x+4)$.
c) $f(x) = x^2(x-4)^2$.
d) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2$.
e) $f(x) = x(x+2)^2(x-1)(x-3)$.
f) $f(x) = x\left(x^2 - 4\right)^2$.

14. Identifique cuál función se corresponde con cada gráfico, — *ver* Fig. 15.2.1. :

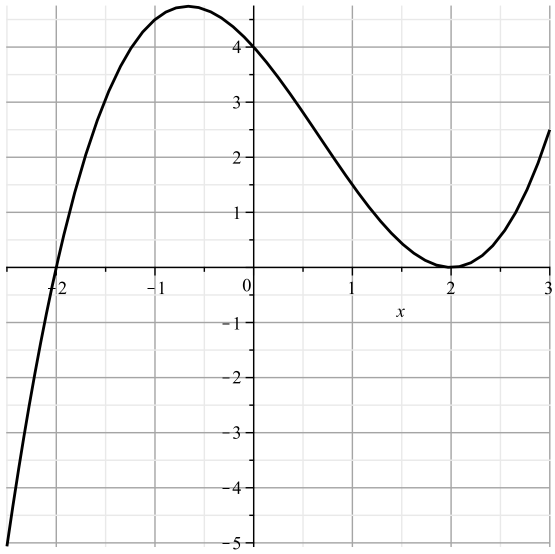
$f_1(x) = -x(x+3)(x-3)$ $\qquad$ $f_3(x) = x^3 - 9x$

$f_2(x) = x(x-1)(x+2)$ $\qquad$ $f_4(x) = -x(x-1)(x+1)$

15. Halle la función polinómica que corresponde a cada uno de los siguientes gráficos:

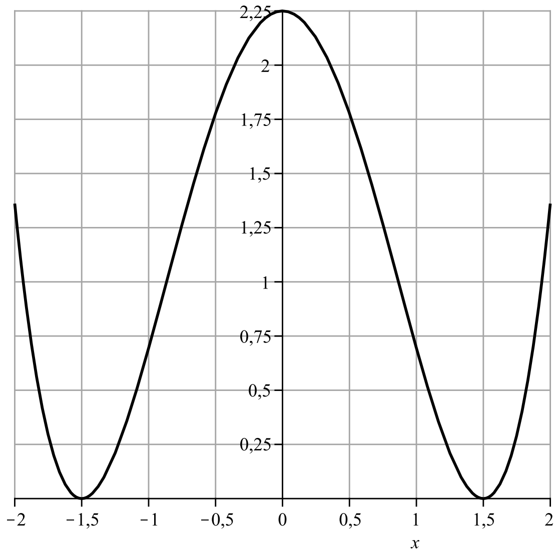
a) La función es de grado 3 — *ver* Fig. 15.2.2.
b) La función es de grado 4 — *ver* Fig. 15.2.3.
c) La función es de grado 5 — *ver* Fig. 15.2.4.

Figura 15.2.2: Gráfico Aproximado



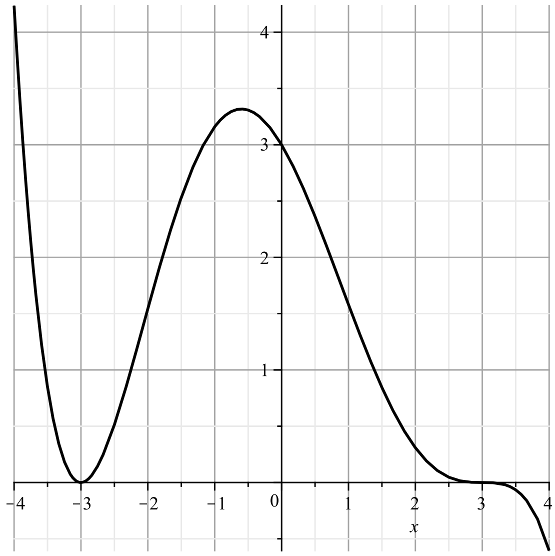
Obtener la fórmula de la función polinómica $f(x)$ cuyo gráfico es el que se muestra aquí arriba. Tenga presente que la función $f(x)$ es de grado 3.

Figura 15.2.3: Gráfico Aproximado



Obtener la fórmula de la función polinómica $f(x)$ cuyo gráfico es el que se muestra aquí arriba. Tenga presente que la función $f(x)$ es de grado 4.

Figura 15.2.4: Gráfico Aproximado



Obtener la fórmula de la función polinómica $f(x)$ cuyo gráfico es el que se muestra aquí arriba. Tenga presente que la función $f(x)$ es de grado 5.

15.3. Teoría Complementaria

En la sección de teoría básica vimos que para entender el comportamiento de las funciones polinómicas es muy importante hallar sus raíces para factorizarlas y analizar si son positivas o negativas en los intervalos determinados por sus raíces reales, lo cual nos permite hacer un gráfico aproximado de forma más clara y precisa.

En general no es fácil hallar las raíces reales de una función polinómica, y en ocasiones suele ser muy complicado determinar si existen.

Hemos dado la Regla de Ruffini y el Teorema de las Raíces Racionales como métodos para hallar raíces racionales. Con el Teorema de los Ceros Racionales, obtenemos posibles candidatos a ser raíces racionales de una función polinómica, y con la Regla de Ruffini lo que hacemos es comprobar si los candidatos a ser raíces efectivamente lo son, y nos sirve también para encontrar la factorización de $f(x)$ como $f(x) = (x-c)\,q(x)$. El problema es que a veces, dependiendo de la función, el Teorema de los Ceros Racionales puede darnos múltiples candidatos a analizar y sería frustrante empezar a comprobar con Ruffini que ninguno de esos candidatos resulte raíz de la función.

Por ejemplo, si consideramos la función polinómica:

$$f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 45$$

en este caso $a_0 = 45$ y $a_4 = 2$. Si queremos hallar sus raíces racionales — *si es que tiene* — debemos hallar los divisores de 45 y los divisores de 2.

- Los divisores de 45 son:

$$\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \pm 9,\ \pm 15,\ \pm 45$$

- Los divisores de 2 son:

$$\pm 1,\ \pm 2$$

Entonces el Teorema de los Ceros Racionales nos dice que los candidatos de la forma $\frac{p}{q}$ a ser raíces racionales son:

$$\frac{p}{q} = \pm\, 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \pm 9,\ \pm 15,\ \pm 45$$

$$\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{5}{2},\ \pm\frac{9}{2},\ \pm\frac{15}{2},\ \pm\frac{45}{2}$$

Si empezáramos a comprobar con la REGLA DE RUFFINI, lo usual es empezar con los candidatos que son enteros, ya que es más sencilla la cuenta, y luego seguiríamos con los no enteros.

¿Y si justo tuvimos tan mala suerte que la única raíz era la última que probamos? O peor aún: ¿Y si ninguna fuera raíz?

Sin duda sería muy frustrante si se dieran éstas situaciones. Para evitar esto último, enunciaremos una regla llamada REGLA DE DESCARTES, la cual no nos dirá exactamente cuáles son las raíces reales de una función polinómica, pero nos ayudara a reducir la cantidad de candidatos a ser raíces racionales o a concluir si una determinada función polinómica posee raíces reales o no. Más aún, si la función en cuestión posee raíces reales, nos ayudara a decidir cuántas tiene y si son positivas o negativas.

Previamente debemos decir qué es una variación de signo de una función.

Definición 15.3.1. Sea $f(x)$ una función polinómica con coeficientes reales, escrita en potencias descendientes de x — *es decir, si* $Gra(f) = n > 0$*,* $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ con $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. Una *variación de signo* se da cuando 2 términos consecutivos tienen signos opuestos.

Por ejemplo, en la función polinómica:

$$f(x) = \underbrace{-7x^6 + 5x^3}_{\substack{\text{Cambio}\\\text{de}\\\text{signo}}} + \underbrace{2x^2 - \overbrace{3x + 8}^{\substack{\text{Cambio}\\\text{de}\\\text{signo}}}}_{\substack{\text{Cambio}\\\text{de}\\\text{signo}}}$$

hay 3 variaciones de signo.

Observación 15.3.1. Si notamos $f(y) = -7y^6 + 5y^3 + 2y^2 - 3y + 8$ entonces evaluar f en $-x$ es simplemente, reemplazar en la fórmula y por $-x$, es decir:

$$\begin{aligned} f(-x) &= -7(-x)^6 + 5(-x)^3 + 2(-x)^2 - 3(-x) + 8 \\ &= -7(-1)^6 x^6 + 5(-1)^3 x^3 + 2(-1)^2 x^2 - 3(-1)x + 8 \\ &= -7x^6 - 5x^3 + 2x^2 + 3x + 8 \end{aligned}$$

Luego:

$$f(-x) = -7x^6 - 5x^3 + 2x^2 + 3x + 8$$

Aclaración: No confundir $f(-x)$ con $-f(x)$. Por ejemplo, si $f(x) = x^3 - 1$, entonces:

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x^3 - 1 \\ -f(x) &= -\left(x^3 - 1\right) = -x^3 + 1 \end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$f(-x) \neq -f(x)$$

Ahora sí, estamos en condiciones de enunciar la REGLA DE DESCARTES.

Teorema 15.3.1. *(Regla de Descartes) Sea f una función polinómica con coeficientes reales escrita en potencias descendientes de x.*

1. *La cantidad de raíces positivas de $f(x)$ es igual al número de variaciones de signo en $f(x)$, o bien es igual a su número disminuido en un entero par.*

2. *La cantidad de raíces negativas de $f(x)$ es igual al número de variaciones de signo en $f(-x)$, o bien es igual a ese número disminuido en un entero par.*

Ejemplo 15.3.1. Si $f(x) = -7x^6 + 5x^3 + 2x^2 - 3x + 8$, $f(x)$ tiene 3 variaciones de signo. Entonces la Regla de Descartes nos dice que la cantidad de raíces positivas es 3 o $3 - 2 = 1$. Es decir, debe tener o bien 3 raíces positivas o bien 1 raíz positiva. Además, como:

$$f(-x) = -7x^6 - 5x^3 + 2x^2 + 3x + 8$$

entonces $f(-x)$ tiene una sola variación de signo, y entonces la Regla de Descartes nos dice que la cantidad de raíces negativas de $f(x)$ es[1] 1.

Ejemplo 15.3.2. Si $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$, observemos que $f(x)$ no tiene variaciones de signo y por lo tanto la Regla de Descartes nos dice que la cantidad de raíces positivas de $f(x)$ debe ser 0, es decir nos dice que f no puede tener raíces positivas. Además, como:

$$f(-x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

entonces $f(-x)$ tiene 3 variaciones de signo, razón por la cual la Regla de Descartes nos dice que o bien habrá 3 raíces reales negativas o bien habrá 1 raíz real negativa.

15.3.1. Aplicación

Ejercicio 15.3.1. Hallar todas las raíces racionales de $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$.

Solución:

Observemos que f ya está escrita en potencias descendientes de x y que es una función polinómica de grado 4, con:

$$a_4 = 3 \qquad a_3 = -10 \qquad a_2 = -3 \qquad a_1 = 8 \qquad a_0 = -2$$

Si $\frac{p}{q}$ es una raíz racional irreducible de f, por el Teorema de los Ceros Racionales, p será un divisor de -2 y q será un divisor de -3.

- Los divisores de -2 son:
$$\pm 1,\ \pm 2$$
- Los divisores de -3 son:
$$\pm 1,\ \pm 3$$

Entonces las posibles raíces racionales de f son:

$$\frac{p}{q} = \pm 1,\ \pm\frac{1}{3},\ \pm 2,\ \pm\frac{2}{3}$$

De estas 8 posibles raíces, como $\mathrm{Gra}(f) = 4$, a lo sumo 4 lo serán. Analicemos las variaciones de signo de $f(x)$ y de $f(-x)$ para aplicar la Regla de Descartes. Como:

$$f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$$

contiene 3 variaciones de signo, entonces habrá — *según la regla antes mencionada* — o bien 3 raíces positivas o bien sólo 1. Y como:

$$f(-x) = 3x^4 + 10x^3 - 3x^2 - 8x - 2$$

contiene sólo una variación de signo, entonces la Regla de Descartes nos permite concluir que f tiene una única raíz real negativa.

Ahora bien, podría ser que dicha raíz sea irracional, pero si es racional, sería la única negativa. Entonces probemos con -1, aplicando la Regla de Ruffini para dividir f por $x + 1$ y comprobar si el resto de dicha división es cero:

[1] Observar que si al número 1 le restáramos un entero par no nulo, el resultado sería un número negativo, y no podemos tener una cantidad negativa de raíces.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3 & -10 & -3 & 8 & -2 \\
-1 & & -3 & 13 & -10 & 2 \\
\hline
 & 3 & -13 & 10 & -2 & \boxed{0}
\end{array}
\ \leftarrow \text{Resto}
$$

Como $r = 0$, entonces efectivamente -1 es raíz de f. Además, por la Regla de Descartes sabemos que es la única raíz negativa y en consecuencia eliminamos de la lista a $-\frac{1}{3}$, -2 y $-\frac{2}{3}$. Por otra parte:

$$f(x) = (x+1)\left(3x^3 - 13x^2 + 10x - 2\right)$$

Entonces si $\frac{p}{q}$ es una raíz racional positiva de f, $\frac{p}{q}$ debe ser raíz de:

$$q(x) = 3x^3 - 13x^2 + 10x - 2$$

y las posibilidades son:

$$\frac{p}{q} = 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2$$

Probamos primero con 1, pero como $q(1) = 3 - 13 + 10 - 2 = -2 \neq 0$, la descartamos inmediatamente. Luego probamos con $\frac{1}{3}$ y comprobamos que:

$$q\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{27} - \frac{13}{9} + \frac{10}{3} - 2 = 0$$

Entonces $\frac{1}{3}$ es raíz de $q(x)$ y procedemos a aplicar la Regla de Ruffini para dividir $q(x)$ por $x - \frac{1}{3}$:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -13 & 10 & -2 \\
\frac{1}{3} & & 1 & -4 & 2 \\
\hline
 & 3 & -12 & 6 & \boxed{0}
\end{array}
\ \leftarrow \text{Resto}
$$

Podemos escribir entonces:

$$f(x) = (x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(3x^2 - 12x + 6\right)$$

El lector puede verificar con la fórmula resolvente que las raíces de la función cuadrática $g(x) = 3x^2 - 12x + 6$ son:

$$r_1 = 2 - \sqrt{2} \qquad\qquad r_2 = 2 + \sqrt{2}$$

las cuales son irracionales. En cualquier caso, podemos escribir:

$$g(x) = 3\left(x - \left(2 - \sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(2 + \sqrt{2}\right)\right)$$

y por lo tanto la función $f(x)$ se factoriza según:

$$f(x) = 3(x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \left(2 - \sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(2 + \sqrt{2}\right)\right)$$

Luego: Las raíces racionales de f son -1 y $\frac{1}{3}$.

15.3.2. Teorema Fundamental del Álgebra

Hemos visto a lo largo de este capítulo distintos métodos para hallar las raíces reales de una función polinómica. Sin embargo, no todas las funciones polinómicas poseen raíces reales. Por ejemplo la función polinómica:

$$f(x) = x^2 + 1$$

no posee raíces reales, ya que $x^2 + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O bien, podemos observar que es una función de grado 2 que se escribe en la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

con $a = 1$, $b = 0$ y $c = 1$. Entonces x es raíz real de f si y sólo si $f(x) = 0$, es decir si $x^2 + 1 = 0$. Pero el discriminante es:

$$b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0$$

razón por la cual la misma carece de raíces reales.

Ahora bien, si nos extendemos al conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ — *ver la sección 6 en la pág. 89* — la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene 2 soluciones complejas, que son j y $-j$.

En efecto:

$$j^2 + 1 = -1 + 1 = 0$$
$$(-j)^2 + 1 = (-1)^2 j^2 + 1 = -1 + 1 = 0$$

Entonces la función polinómica:

$$f(x) = x^2 + 1$$

tiene 2 raíces complejas que son j y $-j$ respectivamente.

Lo anterior nos motiva a hacernos la siguiente pregunta: ¿Las funciones polinómicas que no tenían raíces reales, tienen raíces complejas?

La respuesta a esta pregunta tan difícil es sí, y es difícil de responder porque para responderla nos basamos en el siguiente teorema, que enunciamos a continuación.

Teorema 15.3.2. *(Teorema Fundamental del Álgebra) Si $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ es una función polinómica de grado $n > 0$ con coeficientes complejos* — es decir $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ y $a_n \neq 0$ — *entonces $f(x)$ tiene exactamente n raíces complejas, donde cada raíz de multiplicidad k debe contarse k veces.*

Observación 15.3.2. Si $a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, en particular también son números complejos, y por lo tanto el Teorema Fundamental del Álgebra resulta aplicable también para funciones polinómicas con coeficientes reales.

Capítulo 16

Funciones Exponenciales

16.1. Teoría Básica

En esta sección estudiaremos las funciones exponenciales, las cuales son muy importantes en la matemática.

Este tipo de funciones juega un papel muy importante para describir diversos fenómenos en ciencia, negocios e ingeniería, así como también distintos procesos que ocurren en la naturaleza, como el crecimiento de una población de bacterias, animales o seres humanos. Son de utilidad también para medir la vida media de elementos radiactivos, la tasa anual de interés en las inversiones o cuentas de ahorro, etc...

Por ejemplo, supongamos que estamos interesados en estudiar el crecimiento poblacional generado por una bacteria que se divide en tres por cada hora transcurrida. Es decir, después de una hora se tendrán 3 bacterias. Después de dos horas se tendrán $3^2 = 9$ bacterias — *ya que cada una de las* 3 *bacterias se divide en* 3 *a su vez*. Después de t horas se tendrán en general 3^t bacterias. Entonces, en este caso podemos expresar el crecimiento poblacional de las bacterias en función del tiempo medido en horas, mediante la función:

$$f(t) = 3^t$$

Para ver qué tan rápido crece la población, evaluamos la función en algunos valores:

$$\begin{array}{lll} f(1) = 3 & f(2) = 3^2 = 9 & f(3) = 3^3 = 27 \\ f(4) = 3^4 = 81 & f(5) = 3^5 = 243 & f(6) = 3^6 = 729 \\ f(7) = 3^7 = 2187 & f(8) = 3^8 = 6561 & f(9) = 3^9 = 19683 \end{array}$$

Como vemos, el crecimiento es increíblemente rápido, esto se debe a que la variable t está en el exponente, y por lo tanto un cambio pequeño en dicha variable puede causar un cambio radical en el valor de la función.

Antes de dar la definición precisa de una función exponencial, daremos una noción de la definición de potencia irracional de un número, es decir, daremos una noción de como se define a^x cuando $a > 0$ y x es irracional.

16.1.1. Exponentes irracionales

En la sección 5.1.1 en la pág. 74 se definió a^x para $a > 0$ y $x \in \mathbb{Q}$. Nuestro objetivo es dar una noción de como definir a^x cuando $x \in \mathbb{I}$.

Para definir a^x cuando x es irracional, se requiere matemática avanzada que excede los objetivos de este texto, y por eso daremos una forma intuitiva de la definición. Entonces, consideremos el número irracional $\sqrt{2}$, sabiendo que:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}414213\cdots$$

Aproximamos $\sqrt{2}$ mediante los números racionales:

$$1 \quad 1{,}4 \quad 1{,}41 \quad 1{,}414 \quad 1{,}4142 \quad 1{,}41421 \quad 1{,}414213 \quad \cdots$$

Podemos intuir que una forma posible de definir al número $3^{\sqrt{2}}$ sería considerar que las potencias:

$$3 \quad 3^{1{,}4} \quad 3^{1{,}41} \quad 3^{1{,}414} \quad 3^{1{,}4142} \quad 3^{1{,}41421} \quad 3^{1{,}414213} \quad \ldots$$

conforme el exponente se acerca más y más a $\sqrt{2}$, serán cada vez más parecidas al número $3^{\sqrt{2}}$. Se puede demostrar que existe un único número al cual se aproximan estas potencias. Se define entonces al número $3^{\sqrt{2}}$ como dicho número.

Por ejemplo, utilizando la tecla $\boxed{y^x}$ de una calculadora científica, obtenemos una aproximación de $3^{\sqrt{2}}$ con una precisión de 9 cifras decimales, la cual viene dada por:

$$3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}728804388$$

Entonces, aceptaremos que si $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$, la expresión a^x representa un único número real. ahora si, estamos en condiciones de dar la definición de una función exponencial.

16.1.2. Definición de Función Exponencial

Definición 16.1.1. Diremos que una función f es *exponencial* si se puede escribir en la forma:

$$f(x) = c \cdot a^{bx}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $c \neq 0$ y $b \neq 0$.

- El número a es la *base* de la función exponencial f.
- El dominio natural de estas funciones es el conjunto de todos los número reales $\mathbb{R}$.
- La restricción $a > 0$ se debe a que queremos considerar como dominio de la función al conjunto $\mathbb{R}$, y por lo tanto se quiere evitar que se den situaciones incorrectas tales como la expresión $(-4)^{\frac{1}{2}}$, debido a que la raíz cuadrada de un número negativo no está definida.
- La restricción $a \neq 1$, se debe a que si $a = 1$, $f(x) = 1^x = 1$ es la función constante $y = 1$ y no se considerará función exponencial.
- Por último, las restricciones $c \neq 0$ y $b \neq 0$ se deben a que si $c = 0$, entonces sería $f(x) = 0$ es la función constante $y = 0$ y si $b = 0$, $f(x) = c$ sería la función constante $y = c$, las cuales no se considerarán funciones exponenciales.

Notas: La constante c puede representar el tamaño inicial de una población, la masa inicial de una sustancia, el capital inicial de una inversión, etc... La constante b puede representar por ejemplo si una población crece o decrece, la tasa de interés de una inversión, etc...

En el inicio de esta sección mencionamos que este tipo de funciones se utilizaban para representar diversos fenómenos en ciencia, negocios, etc... A continuación exponemos los siguientes ejemplos:

16.1.3. Ejemplos de Funciones Exponenciales

1. Una población que experimenta un crecimiento exponencial puede representarse con la función exponencial:
$$f(t) = c_0 e^{bt}$$
donde:
   - $f(t)$ es la población a lo largo del tiempo t.
   - c_0 es el tamaño inicial de la población.
   - b es la tasa relativa de crecimiento, $b > 0$.
   - t es el tiempo.
2. Las sustancias radioactivas decaen espontáneamente al emitir radiación. La masa de una sustancia radiactiva disminuye con el transcurso del tiempo y puede demostrarse que la evolución de la cantidad de masa a lo largo del tiempo puede modelarse mediante la función:
$$m(t) = m_0 e^{-bt}$$
donde:
   - m_0 es la masa inicial de la sustancia.
   - b es la tasa de decaimiento de la sustancia, $b > 0$.
   - t es el tiempo.
   - $m(t)$ es la cantidad de masa a lo largo del tiempo t.

Observemos que en ambos ejemplos la base de la función exponencial considerada es el número e, del cual hicimos mención en la sección 5.1.8 en la pág. 81 cuando hablamos de logaritmación. Recordemos que e es un número irracional cuyo valor aproximado es:
$$e \approx 2{,}7182818284\cdots$$
Éste número es la base más importante utilizada en las funciones exponenciales, ya que se usa con frecuencia para modelar diversos fenómenos como acabamos de ver en los dos ejemplos anteriores. Además, en ciertas aplicaciones económicas el número e es la mejor base posible. Al final de esta sección veremos la importancia de este número para calcular el interés compuesto.

16.1.4. Gráfico de una función exponencial

Para comprender el comportamiento de una función exponencial y graficarla de la manera más clara y precisa posible, es necesario observar que los gráficos de estas funciones son curvas crecientes o decrecientes en todo su dominio y tienen al eje x como asíntota horizontal.

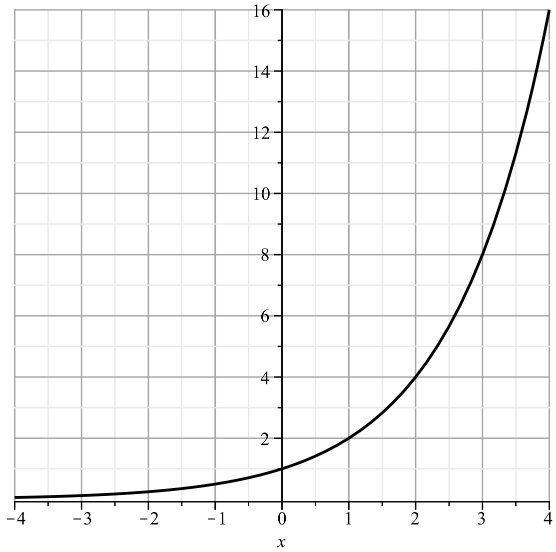
Una *asíntota* es una recta a la cual la curva que describe el gráfico de una función se aproxima indefinidamente.

Por lo tanto, al decir que el eje x es una asíntota horizontal, estamos diciendo que es una recta — *de ecuación* $y = 0$ — a la cual la curva del gráfico que describe una función exponencial se acerca indefinidamente. En el caso de las funciones exponenciales, la curva se aproximará a dicha asíntota sin intersecarla nunca, y esto se debe a que las funciones exponenciales no tienen ceros.

Para ilustrar lo mencionado anteriormente, daremos un gráfico aproximado de algunas funciones exponenciales, utilizando una tabla de valores para representar algunos puntos que nos permitan visualizar las características que tendrán dichas curvas que representan los gráficos de las funciones exponenciales.

Ejemplo 16.1.1. Si $f(x) = 2^x$, podemos considerar la siguiente tabla de valores:

Figura 16.1.1: Gráfico Aproximado de $f(x) = 2^x$



En la figura puede apreciarse el gráfico aproximado de la función $f(x) = 2^x$.

x	$y = 2^x$	x	$y = 2^x$
0	1	−1	$\frac{1}{2}$
1	2	−2	$\frac{1}{4}$
2	4	−3	$\frac{1}{8}$
3	8	−4	$\frac{1}{16}$

Entonces teniendo en cuenta que la función interseca al eje y en el punto $(0, 1)$ y que tiene al eje x como asíntota horizontal, tenemos el siguiente gráfico aproximado — *ver* Fig. 16.1.1.

- El dominio de la función es el conjunto de los números reales, es decir:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

- La imagen de la función es el conjunto de los número reales positivos, es decir:

$$\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$$

- La función es creciente en todo su dominio.

Ejemplo 16.1.2. Si $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, podemos considerar la siguiente tabla de valores:

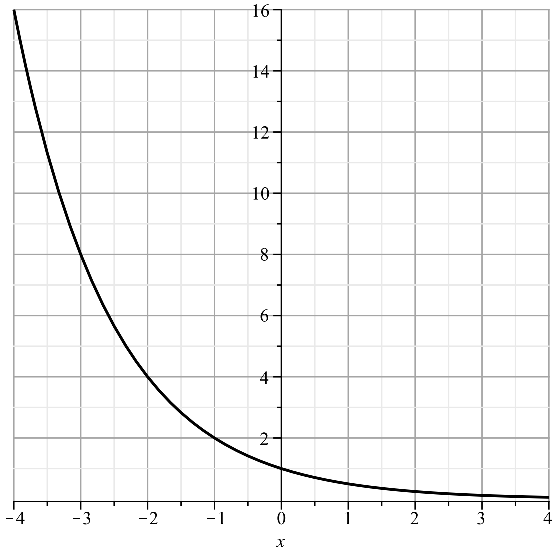
x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
0	1	−1	2
1	$\frac{1}{2}$	−2	4
2	$\frac{1}{4}$	−3	8
3	$\frac{1}{8}$	−4	16

Entonces teniendo en cuenta que la función interseca al eje y en el punto $(0, 1)$ y que tiene al eje x como asíntota horizontal, tenemos el siguiente gráfico aproximado — *ver* Fig. 16.1.2.

- El dominio de la función es el conjunto de los números reales, es decir:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

Figura 16.1.2: Gráfico Aproximado de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



En la figura puede apreciarse el gráfico aproximado de la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

- La imagen de la función es el conjunto de los número reales positivos, es decir:

$$\operatorname{Im}(f) = (0, +\infty)$$

- La función es decreciente en todo su dominio.

Observemos que el gráfico de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ se obtiene reflejando el gráfico de $y = 2^x$ respecto del eje y.

Además, el gráfico de $y = 2^x$ es una curva creciente, mientras que el gráfico de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2^{-x}$ es una curva decreciente, esto se debe a que en el caso de $y = 2^x$, la base es $a = 2 > 1$ y en el caso de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ la base es $a = \frac{1}{2} < 1$.

En general, el gráfico de $f(x) = a^x$ es de alguna de las siguientes maneras — *ver* Fig. 16.1.3.

Observación 16.1.1. Si $a > 1$, $a^{-x} = \left(a^{-1}\right)^x = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, y por lo tanto:

$$a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

16.1.5. Transformaciones de las funciones exponenciales

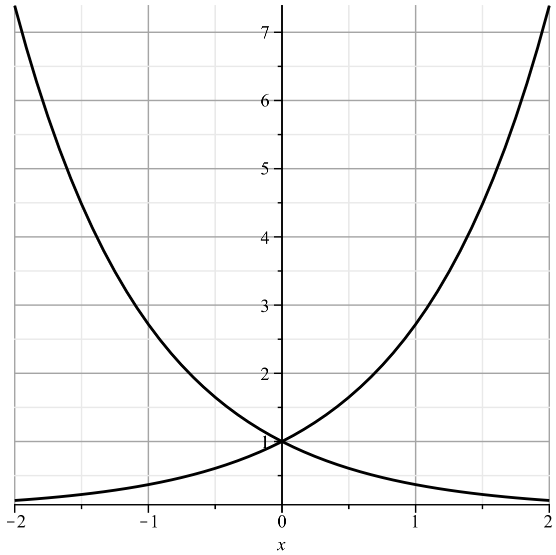
En los ejemplos anteriores hemos visto que el gráfico de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ se obtenía reflejando al gráfico de $y = 2^x$ respecto del eje y. Podemos decir que el gráfico de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ se obtuvo aplicando una transformación de *reflexión* al gráfico de $y = 2^x$. En general, veremos que el gráfico de una función exponencial se obtiene aplicándole ciertas transformaciones a los gráficos de $y = a^x$ con $a > 1$.

A continuación, veremos como obtener los gráficos de $y = -2^x$, de $y = 3 \cdot 2^x$ e $y = \frac{1}{3} \cdot 2^x$ a partir del gráfico de $y = 2^x$.

1. Si $y = -2^x$, consideramos la siguiente tabla de valores:

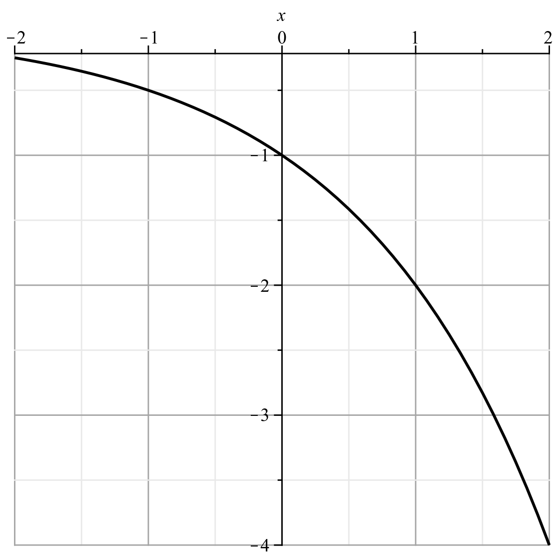
x	$y = -2^x$	x	$y = -2^x$
0	-1	-1	$-\frac{1}{2}$
1	-2	-2	$-\frac{1}{4}$
2	-4	-3	$-\frac{1}{8}$
3	-8	-4	$-\frac{1}{16}$

Figura 16.1.3: Gráfico Aproximado de $f(x) = a^x$



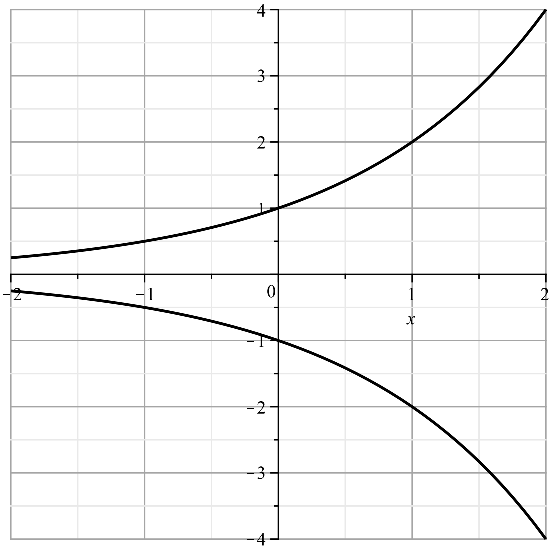
En la figura puede apreciarse el gráfico aproximado de la función $f(x) = a^x$, para valores de $a > 0$ y $a < 1$. Como vemos, si $a > 1$ la función es creciente, mientras que si $a < 1$ la función es decreciente. Ambos dominios son $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Ambas imágenes son $\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$. La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de f. Y el gráfico de f interseca al eje y en el punto $(0, 1)$.

Figura 16.1.4: Gráfico Aproximado de $f(x) = -2^x$



En la figura puede apreciarse el gráfico aproximado de la función $f(x) = -2^x$.

Figura 16.1.5: Gráfico Aproximado de $f(x) = -2^x$ vs $f(x) = 2^x$



En la figura puede apreciarse el gráfico aproximado de la función $f(x) = -2^x$ en comparación con el gráfico aproximado de $f(x) = 2^x$. Podemos observar que el primero se obtiene reflejando el gráfico del segundo con respecto del eje x.

Tenemos entonces el siguiente gráfico aproximado — *ver* Fig. 16.1.4.

Si representamos los gráficos de $y = 2^x$ e $y = -2^x$ en un mismo sistema de coordenadas observaremos que el gráfico de $y = -2^x$ se obtiene reflejando el gráfico de $y = 2^x$ respecto del eje x — *ver* Fig. 16.1.5.

Luego: El gráfico de $y = -2^x$ se obtuvo aplicando la transformación de reflexión con respecto al eje x, al gráfico de $y = 2^x$.

2. Si $y = 3 \cdot 2^x$, tenemos la siguiente tabla:

x	$y = 3 \cdot 2^x$	x	$y = 3 \cdot 2^x$
0	3	-1	$\frac{3}{2}$
1	6	-2	$\frac{3}{4}$
2	12	-3	$\frac{3}{8}$
3	24	-4	$\frac{3}{16}$

Tenemos entonces el siguiente gráfico aproximado — *ver* Fig. 16.1.6.

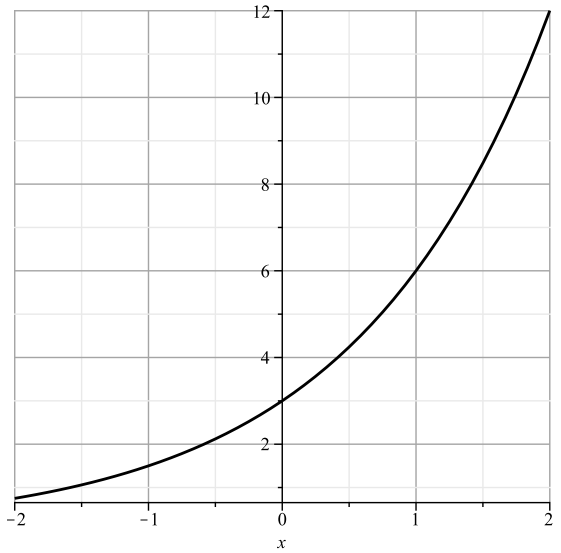
Si representamos los gráficos de $y = 2^x$ e $y = 3 \cdot 2^x$ en un mismo sistema de coordenadas observaremos que el gráfico de $y = 3 \cdot 2^x$ se obtiene alargando el gráfico de $y = 2^x$ verticalmente en un factor de 3 — *ver* Fig. 16.1.7.

Luego: El gráfico de $y = 3 \cdot 2^x$ se obtuvo aplicando la transformación de *alargamiento* vertical en un factor de 3, al gráfico de $y = 2^x$.

3. Se $y = \frac{1}{3} \cdot 2^x$, tenemos la siguiente tabla:

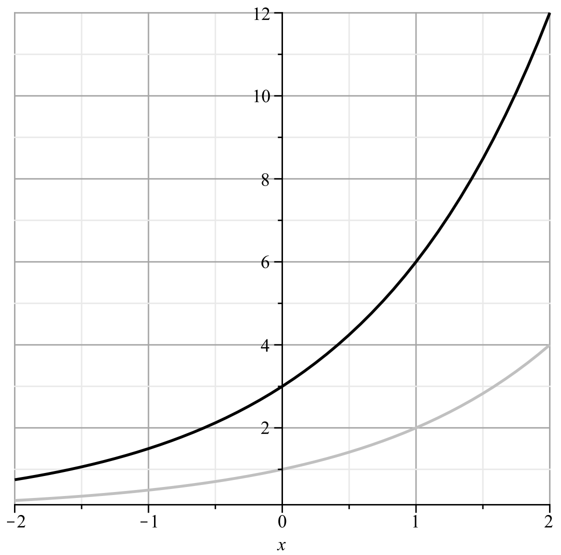
x	$y = \frac{1}{3} \cdot 2^x$	x	$y = \frac{1}{3} \cdot 2^x$
0	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{2}{3}$	-2	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{4}{3}$	-3	$\frac{1}{24}$
3	$\frac{8}{3}$	-4	$\frac{1}{48}$

Figura 16.1.6: GRÁFICO APROXIMADO DE $f(x) = 3 \cdot 2^x$



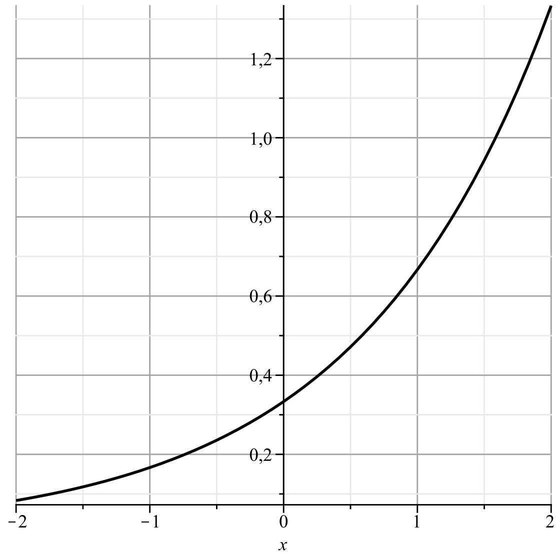
En la figura puede apreciarse el gráfico aproximado de la función $f(x) = 3 \cdot 2^x$.

Figura 16.1.7: GRÁFICO APROXIMADO DE $f(x) = 3 \cdot 2^x$ VS $f(x) = 2^x$



En la figura puede apreciarse el gráfico aproximado de la función $f(x) = 3 \cdot 2^x$ — *negro* — en comparación con el gráfico aproximado de $f(x) = 2^x$ — *gris*. Podemos observar que el primero se obtiene alargando el gráfico del segundo verticalmente en un factor de 3.

Figura 16.1.8: Gráfico Aproximado de $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 2^x$



En la figura puede apreciarse el gráfico aproximado de la función $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 2^x$.

Tenemos entonces el siguiente gráfico aproximado — *ver* Fig. 16.1.8.

Si representamos los gráficos de $y = 2^x$ e $y = \frac{1}{3} \cdot 2^x$ en un mismo sistema de coordenadas observaremos que el gráfico de $y = \frac{1}{3} \cdot 2^x$ se obtiene comprimiendo el gráfico de $y = 2^x$ verticalmente en un factor de 3 — *ver* Fig. 16.1.9.

Luego: El gráfico de $y = \frac{1}{3} \cdot 2^x$ se obtuvo aplicando la transformación de *compresión* vertical en un factor de 3, al gráfico de $y = 2^x$.

En general, si tenemos $y = a^x$ con $a > 1$ y queremos obtener el gráfico de:

1. $y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, se debe reflejar el gráfico de $y = a^x$ respecto del eje y.
2. $y = -a^x$, se debe reflejar el gráfico de $y = a^x$ respecto del eje x.
3. $y = ca^x$ con $c > 1$, se debe alargar el gráfico de $y = a^x$ verticalmente en un factor de c.
4. $y = ca^x$ con $0 < c < 1$, se debe comprimir el gráfico de $y = a^x$ verticalmente en un factor de c.
5. $y = a^{bx}$ con $b > 1$, se debe comprimir el gráfico de $y = a^x$ horizontalmente en un factor de b.
6. $y = a^{bx}$ con $0 < b < 1$, se debe alargar el gráfico de $y = a^x$ horizontalmente en un factor de b.

Observación 16.1.2. Podemos concluir entonces que el gráfico de una función exponencial de la forma $y = ca^{bx}$ se obtiene aplicándole las transformaciones mencionadas anteriormente al gráfico de $y = a^x$.

16.1.6. Traslaciones de gráficos de funciones exponenciales

Hemos visto que el gráfico de una función exponencial que se escribe en la forma:

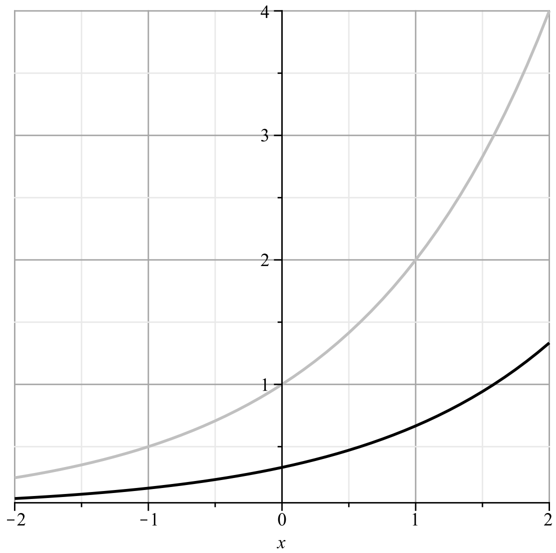
$$y = ca^{bx}$$

puede obtenerse aplicándole ciertas transformaciones al gráfico de $y = a^x$, más precisamente, las transformaciones de reflexión, alargamiento y compresión.

A continuación estudiaremos funciones que denominaremos *funciones exponenciales trasladadas*, las cuales se escribirán en la forma:

$$y = ca^{bx+d}$$

Figura 16.1.9: Gráfico Aproximado de $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 2^x$ vs $f(x) = 2^x$



En la figura puede apreciarse el gráfico aproximado de la función $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 2^x$ — *negro* — en comparación con el gráfico aproximado de $f(x) = 2^x$ — *gris*. Podemos observar que el primero se obtiene comprimiendo el gráfico del segundo verticalmente en un factor de 3.

o bien:

$$y = ca^{bx} + d$$

con $a > 1$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$ y tendrán gráficos que se pueden obtener realizando desplazamientos verticales u horizontales respectivamente, al gráfico de:

$$y = ca^{bx}$$

Nuestro objetivo será explicar en detalle como se realizarán tales desplazamientos, sean verticales u horizontales, para caracterizar dichas funciones, ya que las mismas se utilizan para modelar fenómenos tales como la velocidad de descenso de un paracaidista en función del tiempo, el desempeño de una persona que adquiere una determinada habilidad en función del tiempo de entrenamiento, la variación de la corriente de un circuito electrónico en función del tiempo, etc...

Para fijar ideas comenzaremos viendo los siguientes ejemplos:

1. Consideremos las funciones:

$$y = 2^{x+1} \qquad\qquad y = 2^x$$

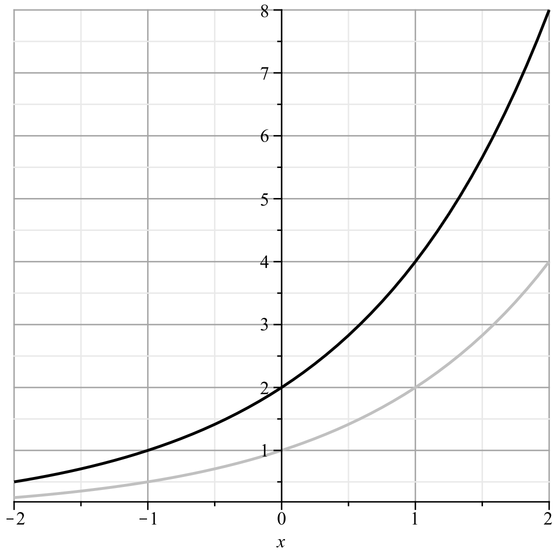
Construiremos una tabla de valores para determinar un gráfico aproximado de ambas funciones y deduciremos qué tipo de desplazamiento le aplicamos a la función $y = 2^x$ para obtener dichos gráficos.

x	$y = 2^{x+1}$	x	$y = 2^x$
0	2	0	1
1	4	1	2
2	8	2	4
3	16	3	8
-1	1	-1	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{4}$
-3	$\frac{1}{4}$	-3	$\frac{1}{8}$

Representamos ambos gráficos en el mismo sistema de coordenadas — *ver* Fig. 16.1.10.

Como el lector puede observar, el gráfico de $y = 2^{x+1}$ se obtiene desplazando el gráfico de $y = 2^x$ una distancia de una unidad hacia la izquierda.

Figura 16.1.10: Gráfico Aproximado de $f(x) = 2^x$ vs $f(x) = 2^{x+1}$



En la figura puede apreciarse el gráfico aproximado de la función $f(x) = 2^{x+1}$ — *negro* — en comparación con el gráfico aproximado de $f(x) = 2^x$ — *gris*. Podemos observar que el primero se obtiene desplazando el gráfico del segundo una distancia de una unidad hacia la izquierda.

2. Consideremos ahora las funciones:

$$y = 2^{x-1} \qquad\qquad y = 2^x$$

Construiremos una tabla de valores para determinar un gráfico aproximado de ambas funciones y deduciremos qué tipo de desplazamiento le aplicamos a la función $y = 2^x$ para obtener dichos gráficos.

x	$y = 2^{x-1}$	x	$y = 2^x$
0	$\frac{1}{2}$	0	1
1	1	1	2
2	2	2	4
3	4	3	8
−1	$\frac{1}{4}$	−1	$\frac{1}{2}$
−2	$\frac{1}{8}$	−2	$\frac{1}{4}$
−3	$\frac{1}{16}$	−3	$\frac{1}{8}$

Representamos ambos gráficos en el mismo sistema de coordenadas — *ver* Fig. 16.1.11.

Como el lector puede observar, el gráfico de $y = 2^{x-1}$ se obtiene desplazando el gráfico de $y = 2^x$ una distancia de una unidad hacia la derecha.

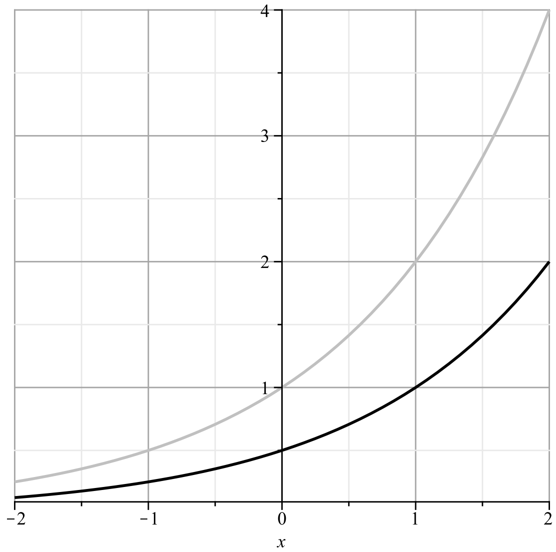
3. Consideremos ahora las funciones:

$$y = 2^x + 1 \qquad\qquad y = 2^x$$

Construiremos una tabla de valores para determinar un gráfico aproximado de ambas funciones y deduciremos qué tipo de desplazamiento le aplicamos a la función $y = 2^x$ para obtener dichos gráficos.

x	$y = 2^x + 1$	x	$y = 2^x$
0	2	0	1
1	3	1	2
2	5	2	4
3	9	3	8
−1	$\frac{3}{2}$	−1	$\frac{1}{2}$
−2	$\frac{5}{4}$	−2	$\frac{1}{4}$
−3	$\frac{9}{8}$	−3	$\frac{1}{8}$

Figura 16.1.11: Gráfico Aproximado de $f(x) = 2^x$ vs $f(x) = 2^{x-1}$



En la figura puede apreciarse el gráfico aproximado de la función $f(x) = 2^{x-1}$ — *negro* — en comparación con el gráfico aproximado de $f(x) = 2^x$ — *gris*. Podemos observar que el primero se obtiene desplazando el gráfico del segundo una distancia de una unidad hacia la derecha.

Representamos ambos gráficos en el mismo sistema de coordenadas — *ver* Fig. 16.1.12.

Como vemos, en este caso el gráfico de $y = 2^x + 1$ se obtiene desplazando el gráfico de $y = 2^x$ en una distancia de una unidad hacia arriba.

Observemos que al desplazar el gráfico una distancia de una unidad hacia arriba, también se desplaza una unidad hacia arriba la asíntota horizontal, es decir, el gráfico de $y = 2^x + 1$ ahora tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = 1$. Esto quiere decir que la curva que describe el gráfico de $y = 2^x + 1$ se acercará indefinidamente a la recta $y = 1$, sin llegar a intersecarla. Para evitar confusiones con el eje x, representamos a las asíntotas horizontales con una recta *punteada — salvo en el caso de que la asíntota coincida con alguno de los ejes coordenados, en cuyo caso no agregamos la recta punteada*.

Por último, como ahora la recta $y = 1$ es la asíntota horizontal de la función $f(x) = 2^x + 1$, es importante observar que la imagen de dicha función será ahora:

$$\mathrm{Im}(f) = (1, +\infty)$$

4. Consideremos ahora las funciones:

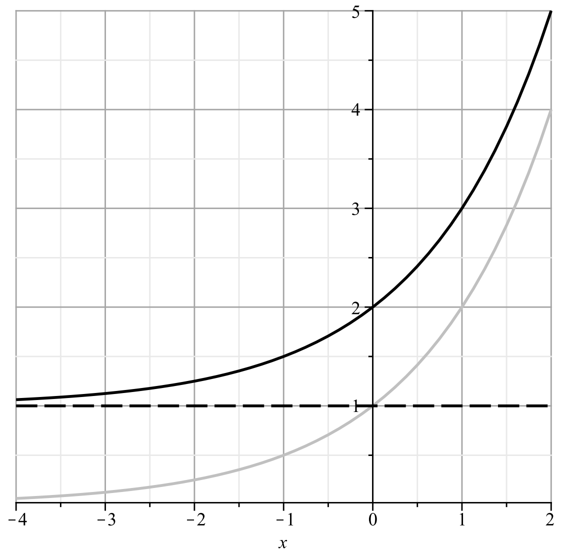
$$y = 2^x - 1 \qquad\qquad y = 2^x$$

Construiremos una tabla de valores para determinar un gráfico aproximado de ambas funciones y deduciremos qué tipo de desplazamiento le aplicamos a la función $y = 2^x$ para obtener dichos gráficos.

x	$y = 2^x - 1$	x	$y = 2^x$
0	0	0	1
1	1	1	2
2	3	2	4
3	7	3	8
−1	$-\frac{1}{2}$	−1	$\frac{1}{2}$
−2	$-\frac{3}{4}$	−2	$\frac{1}{4}$
−3	$-\frac{7}{8}$	−3	$\frac{1}{8}$

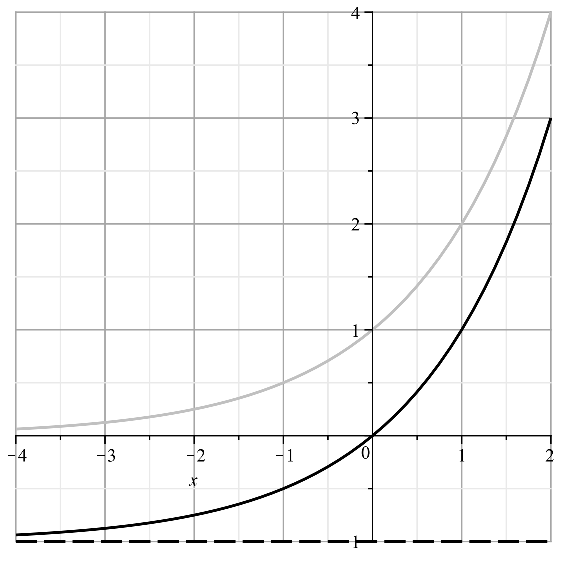
Representamos ambos gráficos en el mismo sistema de coordenadas — *ver* Fig. 16.1.13.

Figura 16.1.12: GRÁFICO APROXIMADO DE $f(x) = 2^x$ vs $f(x) = 2^x + 1$



En la figura puede apreciarse el gráfico aproximado de la función $f(x) = 2^x + 1$ — *negro* — en comparación con el gráfico aproximado de $f(x) = 2^x$ — *gris*. Podemos observar que el primero se obtiene desplazando el gráfico del segundo una distancia de una unidad hacia arriba.

Figura 16.1.13: GRÁFICO APROXIMADO DE $f(x) = 2^x$ vs $f(x) = 2^x - 1$



En la figura puede apreciarse el gráfico aproximado de la función $f(x) = 2^x - 1$ — *negro* — en comparación con el gráfico aproximado de $f(x) = 2^x$ — *gris*. Podemos observar que el primero se obtiene desplazando el gráfico del segundo una distancia de una unidad hacia abajo.

Como vemos, en este caso el gráfico de $y = 2^x - 1$ se obtiene desplazando el gráfico de $y = 2^x$ en una distancia de una unidad hacia abajo.

En este caso, al desplazar el gráfico de $y = 2^x$ una distancia de una unidad hacia abajo, la asíntota horizontal ahora es la recta $y = -1$, y la imagen de la función es el intervalo $(-1, +\infty)$.

Como mencionamos en la sección 16.1.6 en la pág. 301, llamaremos a las funciones que se escriben en la forma:

$$y = ca^{bx+d}$$

o bien:

$$y = ca^{bx} + d$$

con $a > 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$, funciones exponenciales trasladadas.

Este nombre se debe a que los gráficos de estas funciones se obtienen aplicando a la función $y = ca^{bx}$ la transformación que denominaremos *traslación*, la cual consiste en realizar desplazamientos verticales u horizontales al gráfico de $y = ca^{bx}$.

- En el caso de $y = ca^{bx+d}$, su gráfico se obtiene desplazando el gráfico de $y = ca^{bx}$ una distancia de:
  - d unidades hacia la izquierda, si $d < 0$.
  - d unidades hacia la derecha, si $d > 0$.
- En el caso de $y = ca^{bx} + d$, su gráfico se obtiene desplazando el gráfico de $y = ca^{bx}$ una distancia de:
  - d unidades hacia abajo, si $d < 0$.
  - d unidades hacia arriba, si $d > 0$.

16.1.7. Imagen de una función exponencial

Vimos en algunos ejemplos que la imagen de una función exponencial no es siempre el mismo intervalo. Por ejemplo, si:

$$f(x) = 2^x \qquad g(x) = 2^x - 1 \qquad h(x) = 2^x + 1$$

vimos que sus imágenes son, respectivamente:

$$\operatorname{Im}(f) = (0, +\infty) \qquad \operatorname{Im}(g) = (-1, +\infty) \qquad \operatorname{Im}(h) = (1, +\infty)$$

En general, la imagen de una función exponencial que se escribe en la forma:

$$f(x) = ca^{bx+d} \qquad \text{ó} \qquad f(x) = ca^{bx} + d$$

con $a > 1$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \in \mathbb{R}$, quedará determinada por el signo de c y por el valor de d.

Ejemplo 16.1.3. Si $f(x) = 3^x$, entonces $c = 1 > 0$, $a = 3$, $b = 1$ y $d = 0$.

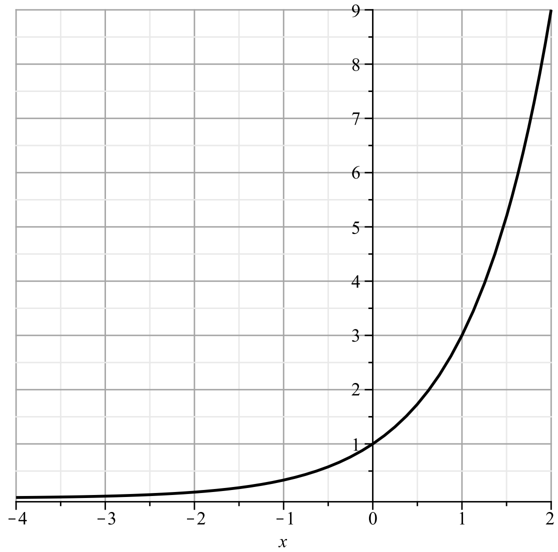
Como podemos observar en la Fig. 16.1.14:

$$\operatorname{Im}(f) = (0, +\infty) = (d, +\infty)$$

Como vemos, el valor de d es uno de los extremos del intervalo que corresponde a la $\operatorname{Im}(f)$:

- Será el lado izquierdo del intervalo, si el mismo es de la forma: $(d, +\infty)$.
- Será el lado derecho del intervalo, si el mismo es de la forma: $(-\infty, d)$.

Figura 16.1.14: Gráfico Aproximado de $f(x) = 3^x$



En la figura puede apreciarse el gráfico aproximado de la función $f(x) = 3^x$, pudiendo observarse que $\operatorname{Im}(f) = (0, +\infty) = (d, +\infty)$.

- El signo del infinito — *y por ende el tipo de intervalo que determina la* $\operatorname{Im}(f)$ — tiene que ver con el signo de c:
  - Si $c > 0$, entonces el intervalo será de la forma: $(d, +\infty)$.
  - Si $c < 0$, entonces el intervalo será de la forma: $(-\infty, d)$.

Ejemplo 16.1.4. Si $f(x) = 3^{-x} + 1$, entonces $c = 1 > 0$, $a = 3$, $b = -1$ y $d = 1$.

Como podemos observar en la Fig. 16.1.15:

$$\operatorname{Im}(f) = (1, +\infty) = (d, +\infty)$$

Como vemos nuevamente, el valor de d es uno de los extremos del intervalo que corresponde a la $\operatorname{Im}(f)$, y el signo positivo de $c = 1 > 0$, determina la forma del mismo, es decir, que el mismo sea de la forma $(d, +\infty)$.

Ejemplo 16.1.5. Si $f(x) = -3^x - 1$, entonces $c = -1 < 0$, $a = 3$, $b = 1$ y $d = -1$.

Como podemos observar en la Fig. 16.1.16:

$$\operatorname{Im}(f) = (-\infty, -1) = (-\infty, -1)$$

Como vemos nuevamente, el valor de d es uno de los extremos del intervalo que corresponde a la $\operatorname{Im}(f)$, y el signo negativo de $c = -1 < 0$, determina la forma del mismo, es decir, que el mismo sea de la forma $(-\infty, d)$.

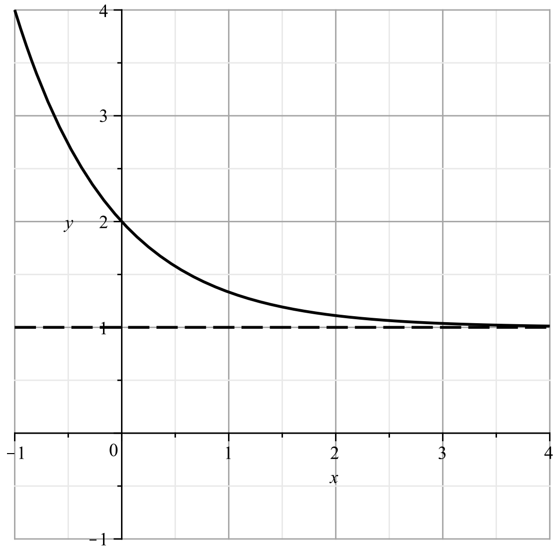
Ejemplo 16.1.6. Si $f(x) = -3^{-x}$, entonces $c = -1 < 0$, $a = 3$, $b = -1$ y $d = 0$.

Como podemos observar en la Fig. 16.1.17:

$$\operatorname{Im}(f) = (-\infty, 0) = (-\infty, d)$$

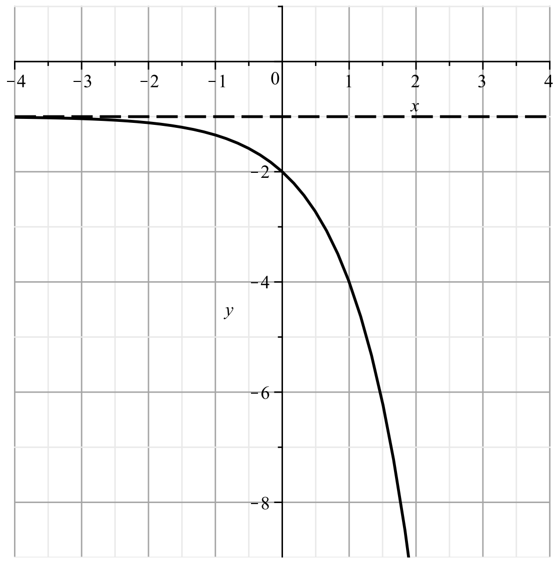
Como vemos nuevamente, el valor de d es uno de los extremos del intervalo que corresponde a la $\operatorname{Im}(f)$, y el signo negativo de $c = -1 < 0$, determina la forma del mismo, es decir, que el mismo sea de la forma $(-\infty, d)$.

Figura 16.1.15: Gráfico Aproximado de $f(x) = 3^{-x} + 1$



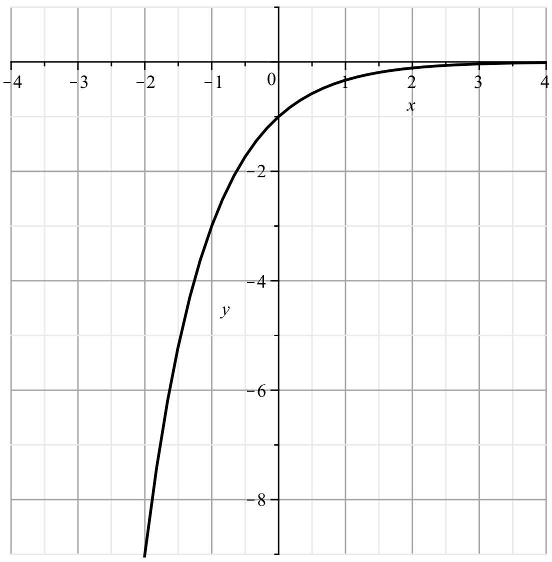
En la figura puede apreciarse el gráfico aproximado de la función $f(x) = 3^{-x} + 1$, pudiendo observarse que $\mathrm{Im}(f) = (1, +\infty) = (d, +\infty)$.

Figura 16.1.16: Gráfico Aproximado de $f(x) = -3^{x} - 1$



En la figura puede apreciarse el gráfico aproximado de la función $f(x) = -3^{x} - 1$, pudiendo observarse que $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, -1) = (-\infty, d)$.

Figura 16.1.17: Gráfico Aproximado de $f(x) = -3^{-x}$



En la figura puede apreciarse el gráfico aproximado de la función $f(x) = -3^{-x}$, pudiendo observarse que $\operatorname{Im}(f) = (-\infty, 0) = (-\infty, d)$.

Como vimos, $\operatorname{Im}(f) = (d, +\infty)$ o $\operatorname{Im}(f) = (-\infty, d)$, y en cada caso, la recta $y = d$ es la asíntota horizontal de la función f. Ahora bien, la pregunta es: ¿Cómo nos damos cuenta si $\operatorname{Im}(f) = (d, +\infty)$ o bien $\operatorname{Im}(f) = (-\infty, d)$? Bueno, la respuesta nos la da el signo de c.

Observemos que en los primeros dos ejemplos, donde $c = 1 > 0$, es decir, c es positivo, en los dos casos es:

$$\operatorname{Im}(f) = (d, +\infty) \leftarrow c > 0$$

En cambio, en los últimos dos ejemplos, donde $c = 1 < 0$, es decir c es negativo, en ambos casos resultó:

$$\operatorname{Im}(f) = (-\infty, d) \leftarrow c < 0$$

En general, valen los siguientes hechos mencionados anteriormente, los cuales plasmaremos en la siguiente:

Proposición 16.1.1. *Sea f una función exponencial escrita en la forma:*

$$f(x) = ca^{bx+d} \qquad \text{ó} \qquad f(x) = ca^{bx} + d$$

con $a > 1$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \in \mathbb{R}$.

- *Si $c > 0$, entonces $Im(f) = (d, +\infty)$ y la recta $y = d$ es asíntota horizontal de f.*
- *Si $c < 0$, entonces $Im(f) = (-\infty, d)$ y la recta $y = d$ es asíntota horizontal de f.*

Luego: *Efectivamente la imagen de una función exponencial queda determinada por el signo de c y el valor de d.*

16.1.8. Crecimiento y Decrecimiento de una función exponencial

Así como la imagen de una función exponencial que se escribe en la forma:

$$f(x) = ca^{bx+d} \qquad \text{ó} \qquad f(x) = ca^{bx} + d$$

con $a > 1$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \in \mathbb{R}$, queda determinada por el signo de c y el valor de d, el crecimiento o decrecimiento de la misma quedará determinado por los signos de b y c.

En los primeros dos ejemplos, los gráficos muestran que la función es *creciente*, y observemos que en ambos casos, b y c tienen el mismo signo:

- En el primer ejemplo, $f(x) = 3^x$, $b = 1 > 0$ y $c = 1 > 0$.
- En el cuarto ejemplo, $f(x) 0 - 3^{-x}$, $b = -1 < 0$ y $c = -1 < 0$.

En cambio, en el segundo y tercer ejemplo, los gráficos muestran que la función es *decreciente*. En cada caso, observemos que b y c tienen signos opuestos:

- En el segundo ejemplo, $f(x) = 3^{-x} + 1$, $b = -1 < 0$ y $c = 1 > 0$.
- En el tercer ejemplo, $f(x) = -3^x - 1$, $b = 1 > 0$ y $c = -1 < 0$.

En general, vale la siguiente:

Proposición 16.1.2. *Sea f una función exponencial escrita en la forma:*

$$f(x) = ca^{bx+d} \qquad ó \qquad f(x) = ca^{bx} + d$$

con $a > 1$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \in \mathbb{R}$. Entonces:

- *Si b y d tienen el mismo signo, la función f será creciente.*
- *Si b y d tienen signos opuestos, la función f será decreciente.*

16.2. Ejercicios

1. Utilice una calculadora para evaluar la función en los valores indicados y exprese sus respuestas con una precisión de 3 dígitos decimales.

   a) $f(x) = 3^x$

   $$f\left(\frac{1}{2}\right) \qquad f\left(\sqrt{2}\right) \qquad f(e)$$

   b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$

   $$f(2\pi) \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

   c) $f(x) = 2^{x-1}$

   $$f(\pi) \qquad f\left(\sqrt{3}\right) \qquad f\left(\frac{1}{2}\right)$$

2. Construya una tabla de valores para dar un gráfico aproximado de las siguientes funciones, indicando en cada caso la asíntota horizontal.

   a)
   $$f(x) = 3^x$$

   b)
   $$f(x) = 2^{x+1}$$

   c)
   $$f(x) = 5^x - 5$$

   d)
   $$f(x) = -e^{-x}$$

e)

$$f(x) = e^{-x} - 1$$

f)

$$f(x) = -\left(\frac{1}{4}\right)^x$$

g)

$$f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x}$$

h)

$$f(x) = 3e^{x+1} - 2$$

3. Represente gráficamente en cada caso las funciones f y g en un mismo sistema de coordenadas e indique qué transformaciones hay que aplicarle al gráfico de f para obtener el gráfico de g.

a)

$$f(x) = 4^x \qquad g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

b)

$$f(x) = 2e^x \qquad g(x) = 2e^{x-3}$$

c)

$$f(x) = -e^x \qquad g(x) = e^{x+1} - 2$$

d)

$$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \qquad g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x} + 1$$

4. Determinar en cada caso — *sin graficar* — la ecuación de la asíntota horizontal y el conjunto imagen de las siguientes funciones:

a)

$$f(x) = -7\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

b)

$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{3}$$

c)

$$f(x) = 8^x + \frac{1}{2}$$

d)

$$f(x) = -5^x - 2$$

5. Encuentre la función exponencial $f(x) = ca^x + d$ cuyo gráfico viene dado por las siguientes curvas — *ver* Fig. 16.2.1.

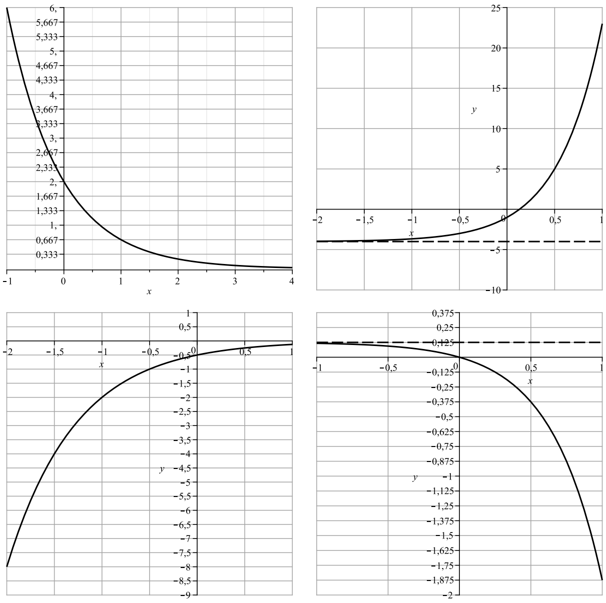
6. Indique cuál es la fórmula que corresponde a cada gráfico dado — *ver* Fig. 16.2.2.

7. Indique — *sin graficar* — si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes, determinando su asíntota horizontal y su imagen.

a)

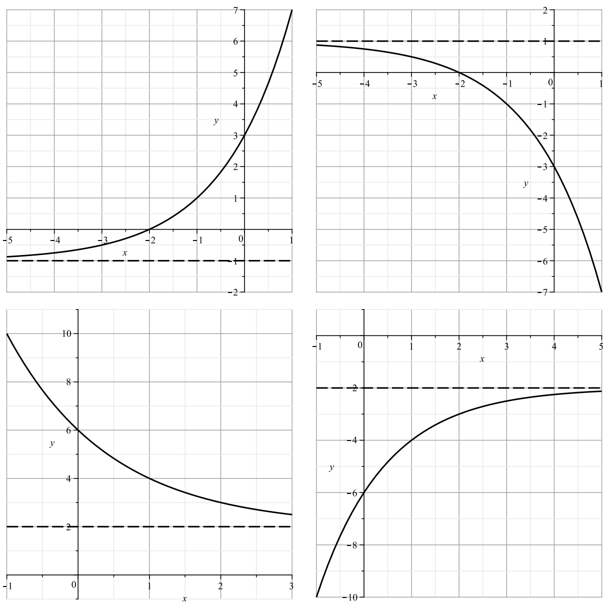
$$f(x) = 3e^{2x} - 8$$

Figura 16.2.1: Gráfico del Ejercicio 5



En la figura se encuentran los gráficos de 4 funciones exponenciales, correspondientes al enunciado del Ejercicio 5. Tenga presente que en el gráfico superior izquierdo, la función pasa por el punto $\left(1, \frac{2}{3}\right)$. En el gráfico inferior derecho, la función pasa por el punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}\right)$.

Figura 16.2.2: Gráfico del Ejercicio 6



En la figura se encuentran los gráficos de 4 funciones exponenciales, correspondientes al enunciado del Ejercicio 6.

b)

$$f(x) = -\frac{1}{4} \cdot 2^{-x+1}$$

c)

$$f(x) = -2 \cdot 3^{\frac{1}{4}x} - 10$$

d)

$$f(x) = 3 \cdot 2^{x} - 2 \cdot 2^{x} + 5$$

8. Una persona invierte \$6500 en una cuenta que paga un interés del 6 % anual, capitalizable de forma continua.

   a) ¿Cuál es el capital final, luego de 3 años?

   b) ¿Cuánto tiempo tomará para que el capital inicial se duplique?

   Nota: El interés compuesto continuo viene dado por la función:

   $$C(t) = C_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

   donde:

   $$\begin{aligned} C(t) &= \text{Capital acumulado luego de } t \text{ años.} \\ C_0 &= \text{Capital inicial.} \\ r &= \text{Tasa de interés anual.} \\ n &= \text{Cantidad de veces que el interés se compone por año.} \\ t &= \text{Cantidad de años.} \end{aligned}$$

   — *ver* TEORÍA COMPLEMENTARIA.

9. Un paracaidista salta desde una altura determinada sobre el suelo. La resistencia del aire que experimenta es proporcional a su velocidad, y la constante de proporcionalidad es 0,2. La velocidad de descenso del paracaidista en función del tiempo t — *medido en segundos* — $v(t)$ se mide en pies por segundo.

   a) Hallar la velocidad inicial del paracaidista.

   b) Calcular la velocidad a los 5 segundos y a los 10 segundos.

   c) Trazar un gráfico aproximado de la función $v(t)$.

10. Si se quiere trazar el gráfico de la función exponencial $f(x) = 2^x$ para $0 \leq x \leq 40$ utilizando una escala de 10 unidades para una pulgada: ¿Cuáles son las dimensiones de la hoja de papel que necesitaría para trazar dicho gráfico?

11. El número de bacterias en un cultivo viene dado por la función:

    $$N(t) = 500e^{\frac{1}{4}t}$$

    donde t es el tiempo medido en horas.

    a) ¿Cuál es el número inicial de bacterias?

    b) ¿Cuántas bacterias están en el cultivo después de 4 horas?

    c) ¿Después de cuántas horas la cantidad de bacterias llegará a 100000?

16.3. Teoría Complementaria

16.3.1. El número e y sus aplicaciones

Hasta ahora hemos mencionado al número e como un número irracional cuyo valor aproximado es $e \approx 1{,}7182818284\cdots$, y mencionamos que es de gran importancia en ciertas aplicaciones económicas, pero no hemos dado ningún ejemplo concreto al respecto.

A continuación daremos una definición más formal del número e y estudiaremos su aplicación en problemas de interés compuesto.

El número e se define como el valor al que se aproxima la expresión:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

a medida que n aumenta — *con* $n \in \mathbb{N}$.

En la siguiente tabla se muestran los valores de dicha expresión para valores de n cada vez más grandes:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
10	$2{,}593742\cdots$
50	$2{,}691588\cdots$
100	$2{,}704813\cdots$
500	$2{,}715568\cdots$
1000	$2{,}716923\cdots$
5000	$2{,}718010\cdots$
10000	$2{,}718145\cdots$
100000	$2{,}718268\cdots$
1000000	$2{,}718204\cdots$

Si siguiéramos aumentando el valor de n, la expresión:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

se aproximaría cada vez más al valor 2,718218.

16.3.2. Interés Compuesto

Las inversiones, como por ejemplo las cuentas de ahorro, pagan una tasa anual de interés que puede capitalizarse anualmente, trimestralmente, semanalmente, diariamente, etc...

Si una cierta cantidad de dinero — *conocida como capital inicial* — se invierte a una tasa de interés i por período, entonces después del primer período el interés sería:

$$C_0 \cdot i$$

y la cantidad de dinero total hasta ese período ascendería a:

$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0\,(1+i)$$

Si prosiguiéramos con la inversión, ahora nuestro capital inicial sería en realidad C_1 — *pues el interés se ha capitalizado* — y el capital obtenido en el segundo período de capitalización, puede obtenerse de la misma forma, según:

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 + C_1 \cdot i \\ &= C_1\,(1+i) \\ &= C_0\,(1+i)^2 \end{aligned}$$

Es decir, el capital en el segundo período de capitalización sería:

$$C_2 = C_0\,(1+i)^2$$

Análogamente, después del tercer período de capitalización, la cantidad obtenida ascendería a:

$$C_3 = C_0\,(1+i)^3$$

En general, después de k períodos, el capital final sería:

$$C_k = C_0\,(1+i)^k$$

y podemos entonces pensar que tenemos una función exponencial, cuya base es:

$$a = 1 + i$$

Si la tasa de interés anual es r y el interés se capitaliza n veces al año, en cada período la tasa de interés i sería:

$$i = \frac{r}{n}$$

y habría nt períodos en t años.

Luego, deducimos que la cantidad de dinero después de t años vendrá dada por la fórmula:

$$C\,(t) = C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

Entonces el *interés compuesto* se calculará mediante la fórmula:

$$C\,(t) = C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

con:

$$\begin{aligned} C\,(t) &= \text{Capital acumulado luego de } t \text{ años.}\\ C_0 &= \text{Capital inicial.}\\ r &= \text{Tasa de interés anual.}\\ n &= \text{Cantidad de veces que el interés se compone por año.}\\ t &= \text{Cantidad de años.} \end{aligned}$$

Ejemplo 16.3.1. Supongamos que invertimos \$10000 a una tasa de interés de 14 % anual. Calculemos cuál sería nuestro capital acumulado en nuestra cuenta después de 3 años, si el interés se capitaliza anualmente, trimestralmente, mensualmente o diariamente.

Observemos que en este caso, nuestro capital inicial es.

$$C_0 = \$10000$$

y la tasa anual es:

$$r = 0{,}14$$

La cantidad de años es:

$$t = 3$$

y nos piden calcular:

$$C\,(3) = 10000\left(1+\frac{0{,}14}{n}\right)^{3n}$$

para valores de:

$$n = 1 \qquad n = 4 \qquad n = 12 \qquad n = 365$$

Tenemos pues la siguiente tabla:

Capitalización	n	**Capital acumulado luego de** 3 **años**
Anual	1	$C(3) = 10000\left(1 + \frac{0{,}14}{1}\right)^{3\cdot 1} \approx \$14815{,}44$
Trimestral	4	$C(3) = 10000\left(1 + \frac{0{,}14}{4}\right)^{3\cdot 4} \approx \$15110{,}69$
Mensual	12	$C(3) = 10000\left(1 + \frac{0{,}14}{12}\right)^{3\cdot 12} \approx \$15182{,}66$
Diaria	365	$C(3) = 10000\left(1 + \frac{0{,}14}{365}\right)^{3\cdot 365} \approx \$15218{,}39$

Como era de esperar, observamos que el pago de interés se incrementa si crece el número n de períodos de capitalización.

Si n creciera indefinidamente, se dice que el interés se capitaliza en forma *continua*. Veamos qué sucede cuando n crece indefinidamente.

Sea:

$$m = \frac{n}{r}$$

entonces si n crece indefinidamente, m también crecerá indefinidamente. Como:

$$m = \frac{n}{r}$$

entonces:

$$\frac{r}{n} = \frac{1}{m}$$

Luego:

$$\begin{aligned} C(t) &= C_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \\ &= C_0\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{n\cdot\frac{1}{r}\cdot rt} \\ &= C_0\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rt} \\ &= C_0\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt} \end{aligned}$$

Es decir:

$$C(t) = C_0\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt}$$

Recordemos que cuando m crece, la expresión:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}$$

se acerca al número e.

Así, el capital acumulado se acercará a:

$$C(t) = C_0 e^{rt}$$

Por lo tanto, si la tasa anual r se capitaliza en forma continua, entonces el capital acumulado después de t años — *si empezamos con un capital inicial* C_0 — será de:

$$C(t) = C_0 e^{rt}$$

Esta expresión nos permite calcular el capital final, luego de un tiempo t, cuando el interés se capitaliza en forma *continua*, es decir *a cada instante*.

16.3.3. El interés compuesto con capitalización continua

Hemos visto que el interés compuesto con capitalización continua puede calcularse mediante la función:

$$C(t) = C_0 e^{rt}$$

con:

$$\begin{aligned} C(t) &= \text{Capital acumulado luego de } t \text{ años.} \\ C_0 &= \text{Capital inicial.} \\ r &= \text{Tasa de interés anual.} \\ t &= \text{Cantidad de años.} \end{aligned}$$

Ejemplo 16.3.2. Calculemos el capital acumulado después de 3 años si invertimos \$10000 a una tasa de interés del 14 % por año, capitalizados de forma continua.

En este caso, usamos la fórmula:

$$C(t) = C_0 e^{rt}$$

con $C_0 = \$10000$, $r = 0{,}14$ y $t = 3$.

Obtenemos entonces:

$$\begin{aligned} C(3) &= 10000 \cdot e^{0{,}14 \cdot 3} \\ &= 10000 \cdot e^{0{,}42} \\ &= 15219{,}62 \end{aligned}$$

Entonces:

$$C(3) = \$15219{,}62$$

Si comparamos el interés compuesto continuo con los intereses compuestos capitalizados en forma anual, trimestral, mensual y diaria — *calculado en el ejemplo anterior* — vemos que en cada caso, el interés compuesto en forma continua es mayor.

Capítulo 17

Funciones Logarítmicas

17.1. Teoría Básica

En esta sección estudiaremos las funciones logarítmicas. Este tipo de funciones son de gran utilidad para medir y representar fenómenos naturales que involucran cantidades muy grandes o muy pequeñas.

En física, cuando una magnitud toma valores en un intervalo muy grande, en general resulta conveniente utilizar una escala logarítmica, con el objetivo de obtener un conjunto de números más pequeños y por lo tanto más manejables.

Las tres situaciones más comunes de este tipo que se analizan son:

- La escala de P.H. potencial de hidrógeno de una solución, que mide la acidez.
- La escala de Richter, que mide la intensidad de los terremotos.
- Y la escala de los decibeles, que mide la intensidad de los sonidos.

Al final de esta sección nos ocuparemos de ejemplificar las situaciones antes mencionadas.

Antes de dar la definición formal de una función logarítmica, recordemos que en la sección 5.1.7 en la pág. 80 definimos el logaritmo en base a de un número x como:

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$$

donde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0 \in \mathbb{R}$.

Es importante recalcar que el logaritmo de un número sólo está definido si el número en cuestión es positivo. Este hecho se debe a que una potencia de un número real $a > 0$, $a \neq 1$, nunca es cero ni negativo, es decir, $a^y > 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$, y por lo tanto $\nexists \log_a(x)$ si $x \leq 0$.

Definición 17.1.1. Diremos que una función f es *logarítmica* si se puede escribir en la forma:

$$f(x) = c\log_a(bx)$$

donde a, b, $c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $c \neq 0$ y $b \neq 0$.

- El número a es la *base* de la función logarítmica f.
- El dominio natural de estas funciones es:
  - El conjunto de números reales positivos, si $b > 0$:

$$\text{Si } b > 0 \Rightarrow \text{Dom}(f) = (0, +\infty)$$

- El conjunto de números reales negativos, si $b < 0$:

$$\text{Si } b < 0 \Rightarrow \text{Dom}(f) = (-\infty, 0)$$

- La restricción $a > 0$, $a \neq 1$ se debe a la definición de $\log_a(x)$.
- La restricción de $b \neq 0$ se debe a que $\nexists \log_a(0)$.
- Por último, la restricción $c \neq 0$ se debe a que si $c = 0$, entonces $f(x) 00$ es la función contante cero y no se considerará logarítmica.

Observación 17.1.1. Cuando definimos logaritmos en la forma:

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$$

$a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, esto nos dice que la forma logarítmica $\log_a(x) = y$ y la forma exponencial $a^y = x$ tienen la misma base a y son ecuaciones equivalentes, es decir, si una se verifica, entonces la otra también.

Por lo tanto se puede pasar de una a otra como se ilustra en la siguiente tabla:

Forma Logarítmica	Forma Exponencial
$\log(100) = 2$	$10^2 = 100$
$\log_3(27) = 3$	$3^3 = 27$
$\log_2\left(\frac{1}{16}\right) = -4$	$2^{-4} = \frac{1}{16}$
$\log_a(x) = y$	$a^y = x$

Recordemos que la equivalencia:

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$$

nos dice que una forma es la *inversa* de la otra — *la logaritmación es la operación inversa de la exponenciación*.

Éste hecho nos motiva a poder pensar intuitivamente que en algún sentido que no precisaremos formalmente, las funciones exponenciales y logarítmicas son una inversa de la otra.

Por ejemplo:

1. $f(x) = \log_2(3x)$ es una función logarítmica con base $a = 2$ y $b = 3$.
2. $f(x) = \log(-x)$ es una función logarítmica con base $a = 10$ y $b = 3$.
3. $f(x) = \ln(x)$ es una función logarítmica con base $a = e$ y $b = 1$.

17.1.1. Gráfico de una función logarítmica

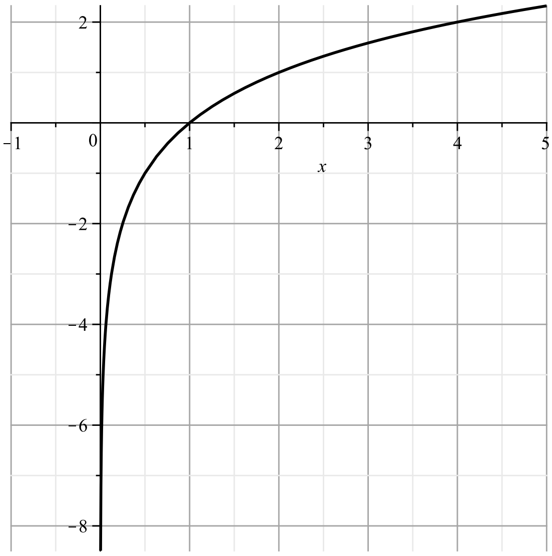
Para comprender el comportamiento de una función logarítmica y graficarla correctamente, es necesario observar que al igual que los gráficos de las funciones exponenciales, los gráficos de las funciones logarítmicas son curvas crecientes o decrecientes en todo su dominio, y presentan una *asíntota vertical* en el eje y, es decir, la recta vertical de ecuación $x = 0$ es asíntota vertical de las funciones logarítmicas.

Por lo tanto, la curva del gráfico que describe una función logarítmica se aproxima indefinidamente a la recta vertical $x = 0$ — *eje y* — sin llegar a intersecarla.

Para ilustrar lo mencionado anteriormente, procederemos de manera análoga a como hicimos en la sección anterior con las funciones exponenciales, utilizando una tabla de valores para representar algunos puntos que nos permitan visualizar las características de los gráficos de este tipo de funciones.

Ejemplo 17.1.1. Si $f(x) = \log_2(x)$, tenemos la siguiente tabla de valores:

Figura 17.1.1: Gráfico Aproximado de $f(x) = \log_2(x)$



En la figura puede apreciarse el gráfico aproximado de la función $f(x) = \log_2(x)$, pudiendo observarse que la misma presenta una asíntota vertical de ecuación $x = 0$ y que su imagen son todos los números reales, es decir $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$.

x	$y = \log_2(x)$
1	0
2	1
4	2
8	3
$\frac{1}{2}$	-1
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{8}$	-3

Entonces teniendo en cuenta que la función interseca al eje x en el punto $(1, 0)$ — *pues* $f(1) = 0$ — y que tiene a la recta $x = 0$ — *eje y* — como asíntota horizontal, tenemos el siguiente gráfico aproximado — *ver* Fig. 17.1.1.

- El dominio de la función es el conjunto de los reales positivos, es decir:

$$\operatorname{Dom}(f) = (0, +\infty)$$

- La imagen de la función es el conjunto de los números reales, es decir:

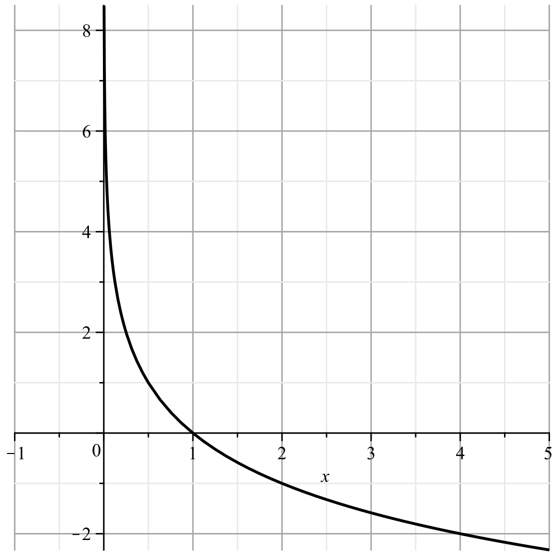
$$\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$$

- La función es creciente en todo su dominio.

Ejemplo 17.1.2. Si $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$, tenemos la siguiente tabla de valores:

x	$y = \log_{\frac{1}{2}}(x)$
1	0
2	-1
4	-2
8	-3
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3

Figura 17.1.2: GRÁFICO APROXIMADO DE $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$



En la figura puede apreciarse el gráfico aproximado de la función $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$, pudiendo observarse que la misma presenta una asíntota vertical de ecuación $x = 0$ y que su imagen son todos los números reales, es decir $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Tenemos entonces el siguiente gráfico aproximado — *ver* FIG. 17.1.2.

- El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales positivos, es decir:

$$\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$$

- La imagen de la función es el conjunto de todos los números reales, es decir:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$$

- La función es decreciente en todo su dominio.

17.1.2. Transformaciones y Traslaciones de funciones logarítmicas

De la misma manera que en las funciones exponenciales, para obtener el gráfico de una función logarítmica que se escribe en la forma $y = c\log_a(bx)$ debemos aplicar al gráfico de $y = \log_a(x)$ las transformaciones de reflexión, alargamiento, compresión o traslación vistas en la sección anterior según corresponda.

Diremos que f es una *función logarítmica trasladada* si se escribe en la forma:

$$f(x) = c\log_a(bx + d) \qquad \text{ó} \qquad f(x) = c\log_a(bx) + d$$

don $a > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$.

Como sucedía con las funciones exponenciales trasladadas, este tipo de funciones tienen como particularidad el hecho de que sus gráficos se obtienen realizando desplazamientos verticales u horizontales al gráfico de:

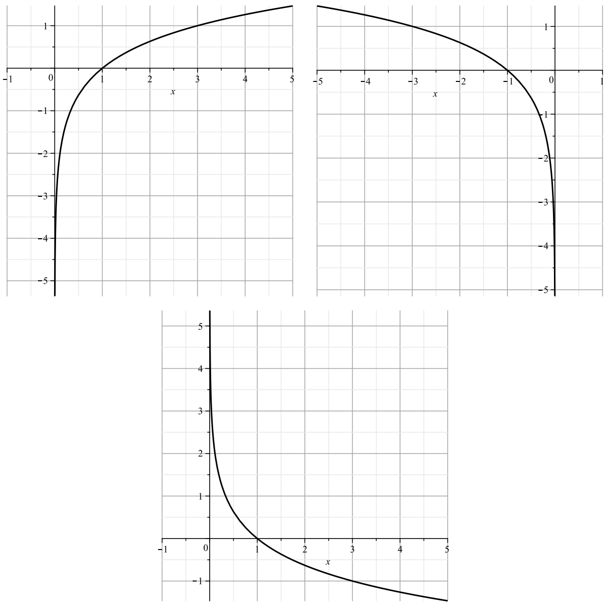
$$y = c\log_a(bx)$$

respectivamente.

Veamos algunos ejemplos para visualizar los hechos mencionados anteriormente.

Ejemplo 17.1.3. *(Transformación de reflexión)*: Si $y = -\log_3(x)$ e $y = \log_3(-x)$, veamos como obtener sus respectivos gráficos a partir del gráfico de $y = \log_3(x)$. Observemos que el dominio de las funciones $y = \log_3(x)$ e $y = -\log_3(x)$ es el conjunto de los números reales positivos, es decir $D_1 = (0, +\infty)$ y el dominio de $y = \log_3(-x)$ es el conjunto de los números reales negativos, o sea $D_2 = (-\infty, 0)$, lo cual nos indica que en la tabla de valores de $y = -\log_3(x)$ debemos utilizar valores positivos y en la tabla de $y = \log_3(-x)$ debemos utilizar valores negativos.

Figura 17.1.3: Reflexiones de Funciones Logarítmicas



En la figura pueden apreciarse los gráficos de las funciones:

$$y = \log_3(x) \qquad y = \log_3(-x) \qquad y = -\log_3(x)$$

El gráfico de $y = \log_3(-x)$ se obtiene reflejando el gráfico de $y = \log_3(x)$ respecto del eje y.
El gráfico de $y = -\log_3(x)$ se obtiene reflejando el gráfico de $y = \log_3(x)$ respecto del eje x.

x	$y = \log_3(x)$	x	$y = \log_3(-x)$	x	$y = -\log_3(x)$
1	0	-1	0	1	0
3	1	-3	1	3	-1
9	2	-9	2	9	-2
$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$	1
$\frac{1}{9}$	-2	$-\frac{1}{9}$	-2	$\frac{1}{9}$	2

Obtenemos entonces los siguientes gráficos aproximados — *ver* Fig. 17.1.3.

- Observemos que:
  - El gráfico de $y = \log_3(-x)$ se obtiene reflejando el gráfico de $y = \log_3(x)$ respecto del eje y.
  - El gráfico de $y = -\log_3(x)$ se obtiene reflejando el gráfico de $y = \log_3(x)$ respecto del eje x.

Ejemplo 17.1.4. *(Transformación de alargamiento)*: Sean $g(x) = 2\log_3(x)$ e $h(x) = \log_3\left(\frac{1}{3}x\right)$. Tenemos las siguientes tablas de valores:

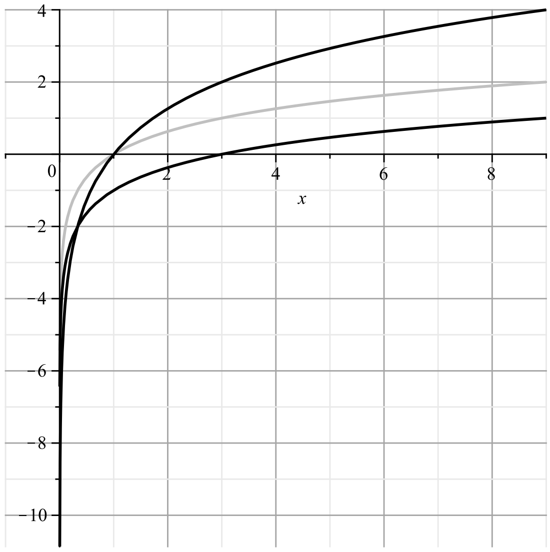
x	$g(x) = 2\log_3(x)$	x	$h(x) = \log_3\left(\frac{1}{3}x\right)$
1	0	1	-1
3	2	3	0
9	4	9	1
$\frac{1}{3}$	-2	$\frac{1}{3}$	-2
$\frac{1}{9}$	-4	$\frac{1}{9}$	-3

Si representamos:

$$f(x) = \log_3(x) \qquad g(x) = 2\log_3(x) \qquad h(x) = \log_3\left(\frac{1}{3}x\right)$$

en un mismo sistema de ejes coordenados — *ver* Fig. 17.1.4 — podremos observar que:

Figura 17.1.4: ALARGAMIENTO DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS



En la figura pueden apreciarse los gráficos de las funciones:

$$f(x) = \log_3(x) \qquad g(x) = 2\log_3(x) \qquad h(x) = \log_3\left(\frac{1}{3}x\right)$$

El gráfico de $g(x)$ se obtiene alargando el gráfico de $f(x)$ verticalmente en un factor de 2.
El gráfico de $h(x)$ se obtiene alargando el gráfico de $f(x)$ horizontalmente en un factor de 3.

- El gráfico de $g(x)$ se obtiene alargando el gráfico de $f(x)$ verticalmente en un factor de 2.
- El gráfico de $h(x)$ se obtiene alargando el gráfico de $f(x)$ horizontalmente en un factor de 3.

Ejemplo 17.1.5. *(Transformación de compresión)*: Sean $g(x) = \log_3(3x)$ e $h(x) = \frac{1}{2}\log_3(x)$. Tenemos las siguientes tablas de valores:

x	$g(x) = \log_3(3x)$	x	$h(x) = \frac{1}{2}\log_3(x)$
1	1	1	0
3	2	3	$\frac{1}{2}$
9	3	9	1
$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{9}$	−1	$\frac{1}{9}$	−1

Si representamos:

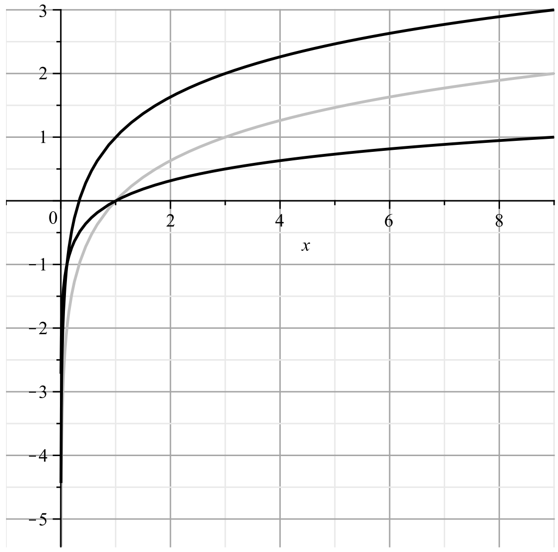
$$f(x) = \log_3(x) \qquad g(x) = \log_3(3x) \qquad h(x) = \frac{1}{2}\log_3(x)$$

en un mismo sistema de ejes coordenados — *ver* FIG. 17.1.5 — podremos observar que:

- El gráfico de $g(x)$ se obtiene comprimiendo el gráfico de $f(x)$ horizontalmente en un factor de 3.
- El gráfico de $h(x)$ se obtiene comprimiendo el gráfico de $f(x)$ verticalmente en un factor de 2.

Ejemplo 17.1.6. *(Transformación de traslación horizontal)*: Sean $g(x) = \log_3(x+1)$ e $h(x) = \log_3(x-1)$. Tenemos las siguientes tablas de valores:

Figura 17.1.5: Compresión de Funciones Logarítmicas



En la figura pueden apreciarse los gráficos de las funciones:

$$f(x) = \log_3(x) \qquad g(x) = \log_3(3x) \qquad h(x) = \frac{1}{2}\log_3(x)$$

El gráfico de $g(x)$ se obtiene comprimiendo el gráfico de $f(x)$ verticalmente en un factor de 3.
El gráfico de $h(x)$ se obtiene comprimiendo el gráfico de $f(x)$ horizontalmente en un factor de 2.

x	$g(x) = \log_3(x+1)$	x	$h(x) = \log_3(x-1)$
0	0	2	0
2	1	4	1
8	2	10	2
$-\frac{2}{3}$	−1	$\frac{4}{3}$	−1
$-\frac{8}{9}$	−2	$\frac{10}{9}$	−2

Si representamos:

$$f(x) = \log_3(x) \qquad g(x) = \log_3(x+1) \qquad h(x) = \log_3(x-1)$$

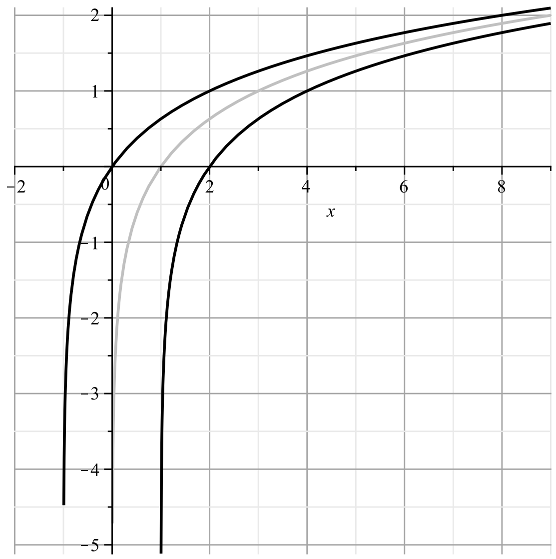
en un mismo sistema de ejes coordenados — *ver* Fig. 17.1.6 — podremos observar que:

- El gráfico de $g(x)$ se obtiene desplazando el gráfico de $f(x)$ una distancia de una unidad hacia la izquierda.
- El gráfico de $h(x)$ se obtiene desplazando el gráfico de $f(x)$ una distancia de una unidad hacia la derecha.

Obs: Al desplazar los gráficos en una distancia de una unidad, también se desplazan las asíntotas verticales respectivamente una unidad. Es decir, el gráfico de $g(x)$ tendrá su asíntota vertical en $x = -1$ y el de $h(x)$ en $x = 1$.

Ejemplo 17.1.7. *(Transformación de traslación vertical)*: Sean $g(x) = \log_3(x) + 1$ e $h(x) = \log_3(x) - 1$. Tenemos las siguientes tablas de valores:

Figura 17.1.6: Traslación Horizontal de Funciones Logarítmicas



En la figura pueden apreciarse los gráficos de las funciones:

$$f(x) = \log_3(x) \qquad g(x) = \log_3(x+1) \qquad h(x) = \log_3(x-1)$$

El gráfico de $g(x)$ se obtiene desplazando el gráfico de $f(x)$ una distancia de una unidad hacia la izquierda.
El gráfico de $h(x)$ se obtiene desplazando el gráfico de $f(x)$ una distancia de una unidad hacia la derecha.

x	$g(x) = \log_3(x) + 1$	x	$h(x) = \log_3(x) - 1$
1	1	1	−1
3	2	3	0
9	3	9	1
$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	−2
$\frac{1}{9}$	−1	$\frac{1}{9}$	−3

Si representamos:

$$f(x) = \log_3(x) \qquad g(x) = \log_3(x+1) \qquad h(x) = \log_3(x-1)$$

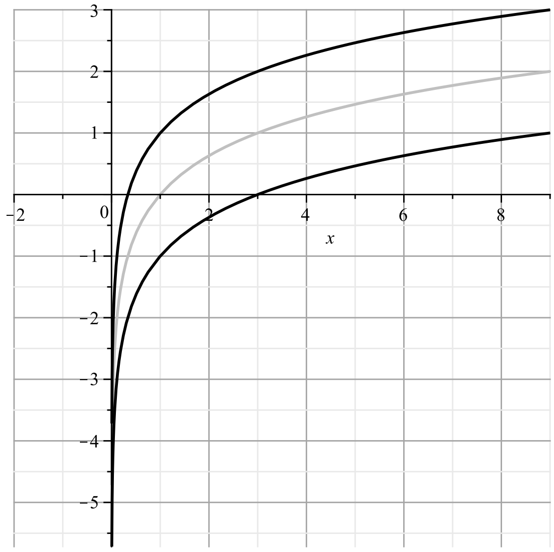
en un mismo sistema de ejes coordenados — *ver* Fig. 17.1.7 — podremos observar que:

- El gráfico de $g(x)$ se obtiene desplazando el gráfico de $f(x)$ una distancia de una unidad hacia arriba.
- El gráfico de $h(x)$ se obtiene desplazando el gráfico de $f(x)$ una distancia de una unidad hacia abajo.

En general, si tenemos $y = \log_a(x)$ con $a > 0$ y $a \neq 1$ y queremos obtener el gráfico de:

- $y = -\log_a(x)$, se debe reflejar el gráfico de $y = \log_a(x)$ respecto del eje y.
- $y = \log_a(-x)$, se debe reflejar el gráfico de $y = \log_a(x)$ respecto del eje x.
- $y = c\log_a(x)$ con $c > 1$, se debe alargar el gráfico de $y = \log_a(x)$ verticalmente en un factor de c.
- $y = c\log_a(x)$ con $0 < c < 1$, se debe comprimir el gráfico de $y = \log_a(x)$ verticalmente en un factor de c.
- $y = \log_a(bx)$ con $0 < b < 1$, se debe alargar el gráfico de $y = \log_a(x)$ horizontalmente en un factor de b.

Figura 17.1.7: Traslación Vertical de Funciones Logarítmicas



En la figura pueden apreciarse los gráficos de las funciones:

$f(x) = \log_3(x)$ $\qquad$ $g(x) = \log_3(x) + 1$ $\qquad$ $h(x) = \log_3(x) - 1$

El gráfico de $g(x)$ se obtiene desplazando el gráfico de $f(x)$ una distancia de una unidad hacia arriba.
El gráfico de $h(x)$ se obtiene desplazando el gráfico de $f(x)$ una distancia de una unidad hacia la abajo.

- $y = \log_a(bx)$ con $b > 1$, se debe comprimir el gráfico de $y = \log_a(x)$ horizontalmente en un factor de b.
- $y = \log_a(x + d)$ con $d > 0$, se debe desplazar el gráfico de $y = \log_a(x)$ una distancia de d unidades hacia la izquierda.
- $y = \log_a(x - d)$ con $d > 0$, se debe desplazar el gráfico de $y = \log_a(x)$ una distancia de d unidades hacia la derecha.
- $y = \log_a(x) + d$ con $d > 0$, se debe desplazar el gráfico de $y = \log_a(x)$ una distancia de d unidades hacia arriba.
- $y = \log_a(x) - d$ con $d > 0$, se debe desplazar el gráfico de $y = \log_a(x)$ una distancia de d unidades hacia abajo.

17.1.3. Dominio de Funciones Logarítmicas

En el inicio de esta sección dijimos que el dominio de una función logarítmica que se escribe en la forma $f(x) = \log_a(bx)$ es $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0)$ si $b < 0$ y $\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$ si $b > 0$, pero no dimos ninguna justificación al respecto.

Este hecho se debe a que $\log_a(bx)$ está definido si la expresión bx es un número positivo, es decir, $\log_a(bx)$ está definido si x es un número real tal que $bx > 0$.

Entonces, el dominio de la función f está determinado por los $x \in \mathbb{R}/bx > 0$.

Luego: Para determinar el dominio de la función, debemos encontrar el conjunto solución de la inecuación:

$$bx > 0$$

Pero claramente observamos que $bx > 0$ si b y x tienen el mismo signo, y esto nos lleva a analizar dos casos por separado:

1. Si $b > 0$, entonces $bx > 0 \Leftrightarrow x > 0$.
2. Si $b < 0$, entonces $bx > 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Pero entonces:

- Si $b > 0$, $\operatorname{Dom}(f) = (0, +\infty)$.
- Si $b < 0$, $\operatorname{Dom}(f) = (-\infty, 0)$.

Luego, si $f(x) = \log_a(bx)$ con $a > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 0$, concluimos que:

- $\operatorname{Dom}(f) = (0, +\infty)$ si $b > 0$.
- $\operatorname{Dom}(f) = (-\infty, 0)$ si $b < 0$.

Ejemplo 17.1.8. Si $f(x) = \log_2(3x)$, como $a = 2$ y $b = 3 > 0$, entonces $\operatorname{Dom}(f) = (0, +\infty)$.

Ejemplo 17.1.9. Si $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-2x)$, como $a = \frac{1}{3}$ y $b = -2 < 0$, entonces $\operatorname{Dom}(f) = (-\infty, 0)$.

¿Qué sucede si tenemos una función exponencial trasladada? ¿Habrá alguna modificación?

Para intentar contestar estas preguntas, veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 17.1.10. Sea $f(x) = 4\log_5\left(\frac{1}{2}x - 4\right)$

En este caso, $\log_5\left(\frac{1}{2}x - 4\right)$ está definido si la expresión dentro del logaritmo, es decir $\frac{1}{2}x - 4$ es positiva. O sea, si:

$$\frac{1}{2}x - 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x > 4 \Leftrightarrow \boxed{x > 8}$$

Pero entonces:

$$\operatorname{Dom}(f) = (8, +\infty)$$

Ejemplo 17.1.11. Sea $f(x) = \frac{1}{2}\log_3(-5x) - 6$

En este caso, $\log_3(-5x)$ está definido si y sólo si la expresión $-5x > 0$, lo cual sucede si $x < 0$.

Pero entonces:

$$\operatorname{Dom}(f) = (-\infty, 0)$$

Como vemos, para determinar el dominio de una función logarítmica, debemos imponer que el argumento del mismo — *es decir la expresión dentro del logaritmo* — sea positiva.

Es decir, si:

$$f(x) = c\log_a(bx + d)$$

o

$$g(x) = c\log_a(bx) + d$$

entonces para determinar el dominio de dichas funciones, debemos plantear en cada caso:

- Para el dominio de f, que:

$$bx + d > 0 \Leftrightarrow bx > -d$$

  - Si $b > 0$ entonces lo podemos pasar dividiendo sin necesidad de dar vuelta la desigualdad, resultando:

$$x > -\frac{d}{b} \Rightarrow \boxed{\operatorname{Dom}(f) = \left(-\frac{d}{b}, +\infty\right)}$$

- Si $b < 0$ entonces podemos pasarlo dividiendo con el especial cuidado de invertir la relación de orden, resultando:

$$x < -\frac{d}{b} \Rightarrow \boxed{\text{Dom}(f) = \left(-\infty, -\frac{d}{b}\right)}$$

- Para el dominio de g, que:

$$bx > 0$$

  - Si $b > 0$ entonces lo podemos pasar dividiendo sin necesidad de dar vuelta la desigualdad, resultando:

$$x > 0 \Rightarrow \boxed{\text{Dom}(f) = (0, +\infty)}$$

  - Si $b < 0$ entonces podemos pasarlo dividiendo con el especial cuidado de invertir la relación de orden, resultando:

$$x < 0 \Rightarrow \boxed{\text{Dom}(f) = (-\infty, 0)}$$

La pregunta es: ¿Por qué nos importa saber el dominio de una función logarítmica?

Bueno, mencionamos que estas funciones son importantes para estudiar diversos fenómenos, por lo tanto, también es importante graficarlas para modelar el fenómeno que va a ser objeto de nuestro estudio.

Vimos en reiteradas ocasiones, que para realizar el gráfico de una función logarítmica, podíamos recurrir a una tabla de valores. Entonces, para saber en qué valores podemos evaluar la misma, debemos conocer su dominio, pues es éste último quién determina los valores donde está definida la función.

Ejemplo 17.1.12. Sea $f(x) = 2\log_2(3x-1)$. Construyamos una tabla de valores y hagamos un gráfico aproximado de la misma.

Para empezar, debemos hallar el dominio, planteando:

$$3x - 1 > 0 \Leftrightarrow 3x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\text{Dom}(f) = \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)}$$

Luego, para construir una tabla de valores, sólo podemos evaluar a la función en valores de $x > \frac{1}{3}$, por ejemplo:

x	$y = 2\log_2(3x-1)$
$\frac{2}{3}$	0
1	2
$\frac{5}{3}$	4
3	6
$\frac{17}{3}$	8

Representando dichos puntos en un sistema de ejes coordenados y trazando la curva que los une, obtenemos el gráfico de la función — *ver* Fig. 17.1.8.

17.1.4. Crecimiento y Decrecimiento de Funciones Logarítmicas

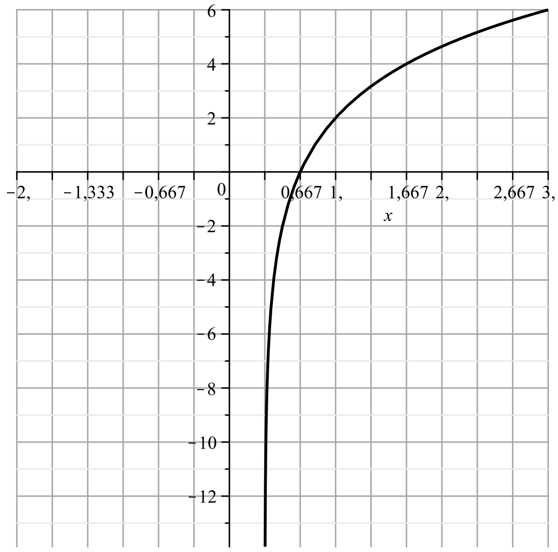
El crecimiento o decrecimiento de una función logarítmica que se escribe en la forma:

$$f(x) = c\log_a(bx+d) \qquad \text{ó} \qquad f(x) = c\log_a(bx) + d$$

don $a > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \in \mathbb{R}$ queda determinado por los signos de b y c. Más precisamente:

- Si b y c tienen el mismo signo, entonces la función es creciente.

Figura 17.1.8: Dominio de una Función Logarítmica



En la figura puede apreciarse el gráfico de la función $f(x) = 2\log_2(3x-1)$. Para poder graficarla implementamos una tabla de valores, pero antes tuvimos que determinar su dominio — $Dom(f) = \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ — a los efectos de saber en qué valores de x poder evaluarla para confeccionar la tabla de valores.

- Si b y c tienen signos opuestos, entonces la función es decreciente.

Ejemplo 17.1.13. Analicemos el crecimiento de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{1}{2}\log_4(2x+5)$
   Como $c = \frac{1}{2} > 0$ y $b = 2 > 0$ tienen el mismo signo, entonces f es creciente.
2. $f(x) = -3\ln(-x) + 2$
   Como $c = -3 < 0$ y $b = -1 < 0$ tienen el mismo signo, entonces f es creciente.
3. $f(x) = -\log_2(4x)$
   Como $c = -1 < 0$ y $b = 4 > 0$ tienen signos opuestos, entonces f es decreciente.
4. $f(x) = -5\log_{\frac{1}{2}}(3x) - 1$
   Como $c = -5 < 0$ y $b = 3 > 0$ tienen signos opuestos, entonces f es decreciente.

Tarea: Se deja como importante ejercicio para que realice el lector, comprobar los resultados obtenidos más arriba realizando los gráficos de dichas funciones.

17.2. Ejercicios

1. Evalúe la función dada en los valores indicados para construir una tabla de valores y obtener un gráfico aproximado de la misma.

   a) $f(x) = \log_2(4x)$ en:

   $x = \frac{1}{16}$ $\quad x = \frac{1}{8}$ $\quad x = \frac{1}{4}$ $\quad x = \frac{1}{2}$ $\quad x = 1$ $\quad x = 2$

   b) $f(x) = 3\log_3(x) - 2$ en:

   $x = \frac{1}{9}$ $\quad x = \frac{1}{3}$ $\quad x = 1$ $\quad x = 3$ $\quad x = 9$

c) $f(x) = \log_4(-x) + 1$ en:

$$x = -\frac{1}{16} \qquad x = -\frac{1}{4} \qquad x = -\frac{1}{2} \qquad x = -1 \qquad x = -2$$

d) $f(x) = -\log_5(x+1)$ en:

$$x = -\frac{4}{5} \qquad x = 0 \qquad x = 4$$

2. Represente gráficamente en cada caso las funciones f y g en un mismo sistema de coordenadas e indique qué transformación hay que aplicarle al gráfico de f para obtener el gráfico de g.

a)

$$f(x) = \log_2(x) \qquad g(x) = \log_2(-x)$$

b)

$$f(x) = \log_4(2x) \qquad g(x) = \log_4(x)$$

c)

$$f(x) = -\log_3(x) \qquad g(x) = -\log_3(x+2)$$

d)

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x) \qquad g(x) = 3\log_{\frac{1}{2}}(2x)$$

3. Determinar el dominio y la ecuación de la asíntota vertical de las siguientes funciones.

a)

$$f(x) = 3\log(7x)$$

b)

$$f(x) = -\log\left(2x + \frac{1}{2}\right)$$

c)

$$f(x) = \frac{1}{3}\log_4\left(-\frac{1}{3}x - 4\right)$$

d)

$$f(x) = \ln(-6x + 2)$$

4. Indique cuál es la fórmula que corresponde a cada gráfico dado — *ver* FIG. 17.2.1.

a)

$$f(x) = 2\log_3(x) - 1$$

b)

$$g(x) = -2\log_3(x) + 1$$

c)

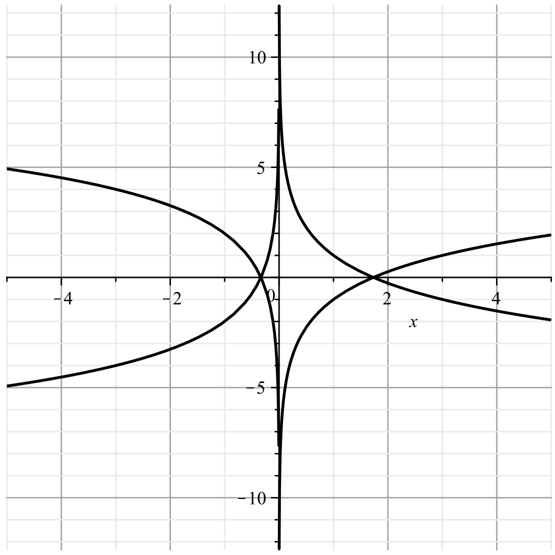
$$h(x) = 2\log_3(-x) + 2$$

d)

$$t(x) = -2\log_3(-x) - 2$$

5. Indique sin graficar, si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes, y determinar su dominio y asíntota vertical.

Figura 17.2.1: Gráfico del Ejercicio 17.2.1



a)

$$f(x) = 4\ln(2x) - 4$$

b)

$$f(x) = -\frac{1}{2}\log_3(-7x+2)$$

c)

$$f(x) = -\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)$$

d)

$$f(x) = \frac{1}{4}\log_3\left(6x - \frac{1}{2}\right)$$

6. El P.H. de una sustancia viene dado por la función:

$$P(t) = -\log(t)$$

donde t es la concentración de iones hidrógeno en moles por litro — *ver Teoría Complementaria*. Se dan a continuación la concentración de iones hidrógenos de las siguientes sustancias:

a) Jugo de limón:

$$[H^+] = 5 \cdot 10^{-3} M$$

b) Jugo de tomate:

$$[H^+] = 3{,}2 \cdot 10^{-4} M$$

c) Agua de mar:

$$[H^+] = 5 \cdot 10^{-9} M$$

Hallar el P.H. de cada sustancia.

7. Encuentre la concentración de iones hidrógeno de la cerveza, sabiendo que su P.H. es igual a 4,6.

8. El terremoto de 1906 en San Francisco tuvo una magnitud de 8,3 en la escala de Richter. Al mismo tiempo en Japón un terremoto con magnitud 4,9 causo sólo daños menores. ¿Cuántas veces más intenso fue el sismo de San Francisco?

Sugerencia: Ver teoría complementaria.

9. La intensidad del sonido del tránsito en una intersección ocupada se midió en $2 \cdot 10^{-5} \frac{W}{m^2}$. Determine el nivel de intensidad en decibeles.

Sugerencia: Ver teoría complementaria.

17.3. Teoría Complementaria

17.3.1. Aplicaciones de las Funciones Logarítmicas

Los químicos medían la acidez de una solución dando su concentración de ion hidrógeno, hasta que en 1909, se definió una magnitud más conveniente llamada P.H. El P.H. de una solución se define por la fórmula:

$$P.H. = -\log\left[H^+\right]$$

donde H^+ es la concentración de iones hidrógeno medida en moles por litro — *simbolizado con la letra M*.

Esto se hizo con el objetivo de evitar números demasiado pequeños y exponentes negativos. Por ejemplo, si $[H^+] = 10^{-2}M$, entonces:

$$P.H. = -\log\left(10^{-2}\right) = -(-2)\log(10) = 2$$

Entonces, se pasó de trabajar con el número 10^{-2} a trabajar con el número 2, lo cual presenta una notable diferencia. Las soluciones que tienen un P.H. igual a 7, como el agua pura, se definen como *neutras*, las que tienen un P.H. menor a 7 se definen como *ácidas* y las que tienen un P.H. mayor a 7 se definen como *básicas*.

Entonces en química, para definir el P.H. de una solución se considera la función logarítmica:

$$P(t) = -\log(t)$$

donde t es la concentración de iones hidrógeno en moles por litro que posee la solución.

Por ejemplo, supongamos que queremos hallar el P.H. de una solución con una concentración de iones hidrógeno de $3{,}5 \cdot 10^{-5}M$. Entonces el P.H. se obtiene evaluando a la función en $t = 3{,}5 \cdot 10^{-5}$, es decir, el P.H. es:

$$\begin{aligned} P\left(3{,}5 \cdot 10^{-5}\right) &= -\log\left(3{,}5 \cdot 10^{-5}\right) \\ &= -\left[\log(3{,}5) + \log\left(10^{-5}\right)\right] \\ &= -\left[\log(3{,}5) - 5\right] \\ &= 5 - \log(3{,}5) \\ &\approx 4{,}46 \end{aligned}$$

Luego: El P.H. es aproximadamente 4,46 de lo cual podemos inferir que se trata de una solución ácida.

Ahora supongamos que queremos hallar la concentración de iones hidrógeno por litro del agua pura. Sabemos que su P.H. es 7, entonces tenemos que:

$$P(t) = 7$$

es decir:

$$\begin{aligned} -\log(t) &= 7 \\ \Leftrightarrow \log(t) &= -7 \end{aligned}$$

¿Cómo despejamos t?

Recordemos que:

$$a^{\log_a(t)} = t$$

debido a que $\log_a(t)$ se define como el número al cual hay que elevar la base a para obtener el número t. Por último, recordemos que $\log_{10}(t) = \log(t)$.

Pero entonces:

$$\begin{aligned} \log(t) &= -7 \\ \Leftrightarrow 10^{\log(t)} &= 10^{-7} \\ \Leftrightarrow t &= 10^{-7} \end{aligned}$$

Luego: La concentración de iones hidrógeno por litro de agua pura es $t = 10^{-7}$ moles por litro.

17.3.2. La escala Richter

En 1935, Charles Richter definió la magnitud M de un terremoto como:

$$M = \log\left(\frac{I}{S}\right)$$

donde I es la intensidad del terremoto — *medida por la amplitud de una lectura de sismógrafo* — y S es la intensidad de un terremoto *estándar — el cual tiene una amplitud de* 1 *micra, que equivale a* 10^{-4}*cm*.

Así, la magnitud del terremoto estándar es:

$$M = \log\left(\frac{S}{S}\right) = \log(1) = 0$$

De los terremotos que estudió Richter, el más grande tuvo una magnitud de $M = 8{,}9$ en su escala. Supongamos que tenemos un terremoto de una magnitud de $M_1 = 7{,}3$ y otro de $M_2 = 8{,}6$ en dicha escala. Es claro que la magnitud del segundo es mayor que la del primero — *ya que* $M_1 < M_2$ —, pero: ¿Cómo podemos determinar cuántas veces más intenso fue el segundo con respecto al primero?

Si llamamos I_1 e I_2 a las intensidades del primer y segundo terremoto respectivamente, lo que queremos es hallar el cociente que los relaciona, es decir la proporción:

$$\frac{I_2}{I_1}$$

que nos servirá para medir cuántas veces más intenso que el primero, fue el segundo terremoto.

Tenemos como información que:

$$7{,}3 = M_1 = \log\left(\frac{I_1}{S}\right)$$

y que:

$$8{,}6 = M_2 = \log\left(\frac{I_2}{S}\right)$$

Ahora bien, observando que:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{I_2}{S}}{\frac{I_1}{S}}$$

y aplicando logaritmo en ambos miembros de la igualdad, tenemos que:

$$\log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = \log\left(\frac{\frac{I_2}{S}}{\frac{I_1}{S}}\right)$$

Recordemos ahora que:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{\frac{I_2}{S}}{\frac{I_1}{S}}\right) &= \log\left(\frac{I_2}{S}\right) - \log\left(\frac{I_1}{S}\right)\\ &= 8{,}6 - 7{,}3\\ &= 1{,}3\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 1{,}3$$

de donde:

$$\boxed{\frac{I_2}{I_1} = 10^{1{,}3} \approx 20}$$

Luego: Concluimos que el segundo terremoto fue aproximadamente 20 veces más intenso que el primero.

Más precisamente, la escala de RICHTER es una forma de convertir las lecturas sismográficas en números que proporcionan una referencia más sencilla para medir la magnitud M de dicho terremoto.

Todos los terremotos se comparan con un terremoto de nivel cero cuya lectura sismográfica mide 0,001 de milímetro a una distancia de 100 Km del epicentro del mismo.

Un terremoto cuya lectura sismográfica mide x milímetros tiene una magnitud $M(x)$ dada por la función:

$$M(x) = \log\left(\frac{x}{10^{-3}}\right)$$

donde $x_0 = 10^{-3}$ es la lectura de un terremoto de nivel cero a la misma distancia del epicentro.

17.3.3. La escala de Decibeles

El decibel (dB) es una unidad de medida utilizada para el nivel de potencia y el nivel de intensidad del sonido. El oído es sensible a una amplia variedad de intensidades de sonido. Se toma como intensidad de referencia a:

$$I_0 = 10^{-12}$$

watts por metro cuadrado — *notado como* $\frac{W}{m^2}$ — a una frecuencia de 1000 hertz, que mide un sonido que es apenas audible, es decir llamado el umbral de audición. Dicho umbral de audición es el sonido de menor intensidad que puede detectar el oído humano, el cual presenta una sensibilidad a las variaciones de intensidad sonora que sigue una escala aproximadamente logarítmica.

Así, se define para el cálculo de la sensación recibida por un oyente, un nivel de potencia o de intensidad D, en decibeles, como:

$$D = 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$

donde I es la potencia de la fuente del sonido a estudiar medida en watts por metro cuadrado.

El nivel de intensidad del sonido de referencia apenas audible es:

$$D = 10\log\left(\frac{10^{-12}}{10^{-12}}\right) = 10\log(1) = 10 \cdot 0 = 0\,dB$$

El decibel (dB) debe su nombre al físico norteamericano GRAHAM BELL, y fue usado en principio para medir la intensidad del sonido como ya mencionamos anteriormente. Cabe destacar que un decibel es la manera adecuada en que los ingenieros describen las relaciones de potencia o voltajes entre la entrada y la salida de un cuadripolo.

Por ejemplo, podemos definir el volumen o nivel de un sonido de intensidad x, medido en watts por metro cuadrado — $\frac{W}{m^2}$ — mediante la función logarítmica:

$$V(x) = 10\log\left(\frac{x}{10^{-12}}\right)$$

Ejemplo 17.3.1. Si tenemos de referencia que el sonido de una pistola al disparar es de alrededor de $y_1 = 140dB$ y el de una conversación normal es de $y_2 = 50dB$, calculemos cuánto es el volumen del sonido medido en watts por metro cuadrado.

Si llamamos:

- x_1 al volumen del sonido al disparar una pistola.
- x_2 al volumen del sonido de una conversación normal.

Tenemos como datos que:

$$\begin{aligned} V(x_1) &= y_1 = 140 \\ V(x_2) &= y_2 = 50 \end{aligned}$$

Queremos hallar x_1 y x_2.

Como $V(x_1) = 140$, entonces:

$$\begin{aligned} 10\log\left(\frac{x_1}{10^{-12}}\right) &= 140 \\ \Leftrightarrow \log\left(\frac{x_1}{10^{-12}}\right) &= 14 \\ \Leftrightarrow \frac{x_1}{10^{-12}} &= 10^{14} \\ \Leftrightarrow x_1 &= 10^{14}\cdot 10^{-12} \\ \Leftrightarrow x_1 &= 10^{2} \\ \Leftrightarrow x_1 &= 100 \end{aligned}$$

Como $V(x_2) = 50$, entonces:

$$\begin{aligned} 10\log\left(\frac{x_1}{10^{-12}}\right) &= 50 \\ \Leftrightarrow \log\left(\frac{x_1}{10^{-12}}\right) &= 5 \\ \Leftrightarrow \frac{x_1}{10^{-12}} &= 10^{5} \\ \Leftrightarrow x_1 &= 10^{5}\cdot 10^{-12} \\ \Leftrightarrow x_1 &= 10^{-7} \end{aligned}$$

Luego: El volumen del sonido de una pistola al disparar es:

$$\boxed{x_1 = 100\frac{W}{m^2}}$$

y el volumen del sonido de una conversación normal entre dos personas es:

$$\boxed{x_2 = 10^{-7}\frac{W}{m^2}}$$

Ejemplo 17.3.2. Si el volumen o intensidad del sonido de un tren subterráneo se midió en $10^{-2,2}\frac{W}{m^2}$, calculemos el volumen del sonido del tren subterráneo.

Tenemos que hallar:

$$\begin{aligned} V\left(10^{-2,2}\right) &= 10\log\left(\frac{10^{-2,2}}{10^{-12}}\right) \\ &= 10\log\left(10^{-2,2}\cdot 10^{12}\right) \\ &= 10\log\left(10^{-2,2+12}\right) \\ &= 10\log\left(10^{9,8}\right) \\ &= 10\cdot 9,8 \\ &= 98\,dB \end{aligned}$$

Luego: El volumen del sonido del tren subterráneo es de $98\,dB$.

Capítulo 18

Funciones Trigonométricas

18.1. Teoría Básica

18.1.1. Motivación

Las funciones trigonométricas se utilizan para *modelar* situaciones periódicas, es decir aquellas en las que un determinado fenómeno se produce en forma repetitiva, cumpliendo un determinado ciclo en un intervalo de tiempo determinado. Por *modelar* debemos entender que es un término técnico que alude a caracterizar matemáticamente el fenómeno en cuestión a los efectos de poder predecir su evolución.

Definición 18.1.1. Si un determinado fenómeno ocurre con periodicidad, sabemos que se repetirá indefinidamente a lo largo del tiempo. Entonces llamaremos *ciclo* del fenómeno a la evolución del mismo durante un período de tiempo tal que pueda completar su desarrollo natural, desde el momento en que empieza hasta el inmediatamente próximo momento donde vuelve a empezar, para repetir su evolución. Por ejemplo el *ciclo* de la órbita de la Tierra alrededor del Sol comienza el primero de enero, se sucede durante el año, y termina a las doce de la noche del 31 de diciembre, para volver a empezar inmediatamente a continuación, al comenzar el primero de enero próximo. En este sentido diremos que el *ciclo* de la órbita terrestre alrededor del Sol tiene un período P de un año y una frecuencia F de una vez cada año. La relación matemática que hay entre el período P y la frecuencia F es:

$$F = \frac{1}{P}$$

No es para nada difícil imaginar situaciones de este tipo, pudiendo encontrar en la vida diaria un sin número de ejemplos como los descriptos a continuación:

- **La rotación de la Tierra sobre su propio eje:** Todos sabemos que la Tierra gira sobre su propio eje, dando una vuelta completa cada 24 horas. En este sentido diremos que el período de rotación de la tierra sobre su propio eje es de 24 horas. Este movimiento determina la salida y puesta del Sol, que a su vez es un fenómeno periódico.

- **La órbita de la Tierra alrededor del Sol:** Además de girar sobre su propio eje, sabemos que la Tierra también gira alrededor del Sol describiendo una órbita elíptica[1] — *ver* Fig. 18.1.1 — completando una vuelta en un tiempo aproximado de 365 días, es decir un año. En este sentido suele decirse que el movimiento de la Tierra alrededor del Sol es un fenómeno periódico, con un período de 365 días, o bien un año y una frecuencia de una vuelta completa por año. Por otra parte, como la distancia de la Tierra al Sol no es la misma alrededor de cada punto de la órbita que describe la misma alrededor del Sol, esas variaciones de distancia dan origen a las diferentes estaciones del año, como ser el verano, otoño, invierno y primavera. Las estaciones se suceden a la vez en forma periódica, siendo su duración aproximada es de tres meses.

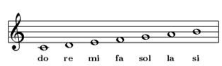
[1]Una órbita se dice elíptica cuando la curva que describe es una elipse.

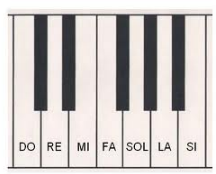
Figura 18.1.1: Órbita de la Tierra alrededor del Sol

La órbita de la Tierra cuando gira alrededor del Sol es elíptica, es decir describe una curva en forma de elipse, como puede observarse en el gráfico de más arriba.

- **El sonido:** El sonido que percibimos es en realidad el resultado de la propagación de ondas acústicas a través del aire. Estas ondas son en realidad perturbaciones en forma de vibraciones, que hacen que las moléculas de aire comiencen a vibrar en torno a su posición central, contagiándose este comportamiento vibratorio de molécula en molécula — *pues las moléculas de aire se encuentran muy próximas entre si y en consecuencia el movimiento de alguna de ellas contagia a las contiguas o vecinas* — que al entrar en contacto con algún medio sólido que se interponga en su camino, produce diferencias de presión en éste último, provocando que el mismo resuene[2] al compás de dicha onda haciéndolo vibrar. Cuando el medio sólido es una membrana tensa, la misma comienza a vibrar, produciéndose sobre su superficie un movimiento oscilatorio — *normalmente imperceptible a la vista* — que se repite una cierta cantidad de veces por segundo. La cantidad de veces por segundo que se repite la oscilación se llama *frecuencia* del sonido, y es la que determina el *tono* del mismo.

  Por ejemplo, un piano tiene un teclado con 88 teclas, contando las blancas y las negras. Cada tecla produce un sonido distinto en la escala típica dodecafónica:

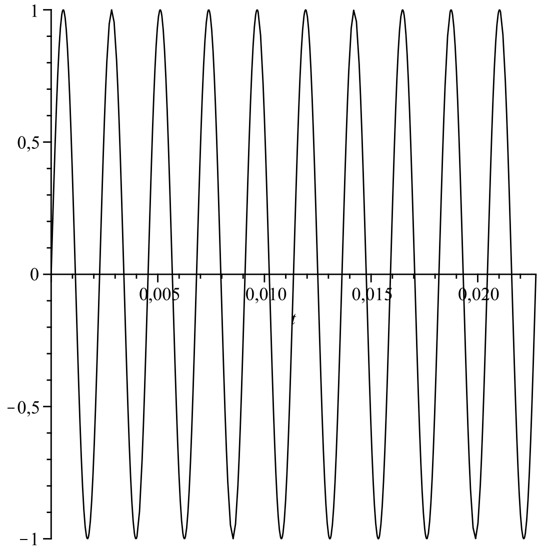




  El sonido de uno de los tantos *la* corresponde a una frecuencia de 440 hertz, es decir la cuerda se encontraría oscilando 440 veces por segundo, produciendo una vibración que es percibida por el tímpano de nuestros oídos — *el cual es una membrana que detecta las vibraciones en las moléculas de aire* — e interpretada como la nota correspondiente a un *la*. Si observáramos un punto determinado sobre la cuerda, veríamos que dicho punto se aparta de la posición de reposo hasta alcanzar una altura máxima, luego de lo cual vuelve a pasar por el centro de oscilación para llegar inmediatamente a alcanzar una altura mínima, para finalizar volviendo al lugar correspondiente al centro de oscilación y completar así su ciclo. Pero este ciclo se repite 440 veces por segundo, dando origen al sonido que percibimos — *ver* Fig. 18.1.2.

[2]Resonar significa ponerse en sintonía con algún tipo de movimiento, por contagio. Es el término técnico utilizado para referirse a la propiedad de ciertos objetos o materiales de ponerse en sintonía con el movimiento de otros objetos, copiando su comportamiento. Por ejemplo cuando un sonido muy agudo hace trizar o producir rajaduras en una copa, es porque las moléculas de cristal de la copa comienzan a *resonar* al compás de dicho sonido. Éste movimiento hace que el cristal se fisure, produciendo las rajaduras.

Figura 18.1.2: Vibración de una cuerda a 440 Hertz



En la figura podemos apreciar el movimiento oscilatorio que describe un punto situado sobre una cuerda vibrando a una frecuencia de 440 Hertz, es decir 440 veces por segundo. Las cumbres representan las posiciones máximas alcanzadas por el punto. Los valles, las posiciones mínimas alcanzadas por el punto. Y el centro de oscilación corresponde al punto sobre la cuerda cuando la misma se encuentra en reposo. El intervalo de tiempo representado en la figura es entre 0 y $\frac{1}{44}$ segundos, razón por la cual es lógico que haya un total de diez oscilaciones completas en dicho intervalo de tiempo, pues hasta completar un segundo, debería haber 44 veces más oscilaciones, que completarían las 440 que hay en el intervalo de tiempo comprendido entre 0 y 1 segundo.

- **Movimiento Circular Uniforme:** El movimiento circular uniforme es uno de los ejemplos más sencillos de *movimiento armónico simple*[3], el cual podría resumirse diciendo que es un movimiento periódico en el tiempo para las coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ de un punto $P = (x(t), y(t))$ sobre la circunferencia de radio r que hace las veces de *pista* sobre la cual se encuentra produciéndose dicho movimiento — *ver* Fig 18.1.3. Si suponemos que $r = 1$ metro y que la *velocidad angular*[4] es $\omega = 1\frac{m}{s}$, teniendo presente que la longitud de la circunferencia sería entonces de 2π metros, entonces el tiempo necesario para completar una vuelta sería de 2π segundos. Como todo movimiento bidimensional, si siguiéramos con la vista una partícula que se mueve a lo largo del tiempo sobre la circunferencia, digamos $P(t) = (x(t), y(t))$, observaríamos que las coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ realizan un *movimiento armónico simple*. A lo largo de una vuelta completa, si observamos la altura $y(t)$, podremos ver que la misma inicialmente se encuentra a una altura $y(0) = 0$. Luego aumenta hasta llegar a su punto máximo $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, para luego volver a atravesar la altura cero al tiempo $t = \pi$ segundos. Al llegar a los $\frac{3}{2}\pi$ segundos la altura es mínima, valiendo $y\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$. Finalmente, la partícula llega al lugar originario cuanto $t = 2\pi$ segundos, valiendo $y(2\pi) = y(0) = 0$. Precisamente ésta es la esencia del movimiento armónico, que se caracteriza por empezar, desenvolverse hasta completar un determinado ciclo, y luego llegar nuevamente al punto de partida para volver a empezar desde dicho punto. La *periodicidad* es la característica fundamental de este tipo de movimiento.

  El período P y frecuencia F de un movimiento circular uniforme se calculan según:

  $$P = \frac{2\pi}{\omega} \qquad\qquad F = \frac{1}{P} = \frac{\omega}{2\pi}$$

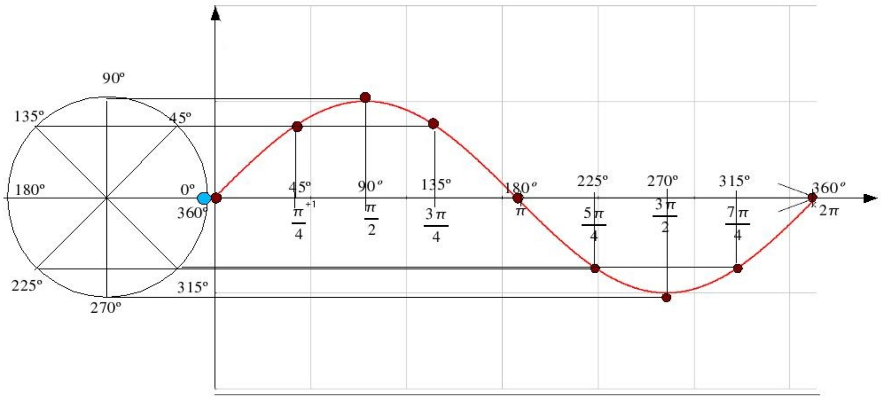
  Otra característica de este movimiento es la *amplitud*, que tiene que ver con cuánto se apartan de la posición central de oscilación las coordenadas $x(t)$ e $y(t)$. En el ejemplo de la figura, podemos observar

[3]El movimiento armónico simple es un movimiento periódico de vaivén, en el que un cuerpo oscila de un lado al otro de su posición de equilibrio, en una dirección determinada, y en intervalos iguales de tiempo.

[4]La velocidad angular en un *movimiento circular uniforme* es la variación de ángulo medida en radianes con respecto a la variación de tiempo. Esto es:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Figura 18.1.3: Movimiento Circular Uniforme



En la figura podemos apreciar un ejemplo de movimiento circular uniforme — *MCU* — que se produce sobre una circunferencia de radio $r = 1$ metro con una velocidad angular constante $\omega = 1\frac{m}{s}$.

que la amplitud A es:

$$A = 1 \text{ metro}$$

- **Las aspas de un ventilador:** El movimiento de las aspas de un ventilador es también un fenómeno periódico, pues es un movimiento circular uniforme. Las aspas del mismo giran una determinada cantidad de veces por segundo, de modo tal que si observáramos una de ellas girar, veríamos que la misma parte de una determinada posición inicial, para dar una vuelta completa luego de un lapso de tiempo determinado, y terminar volviendo al mismo lugar donde se inició el movimiento.

- **Las agujas de un reloj:** El movimiento circular que describen las agujas de un reloj analógico con aguja horaria, minutero y segundero es un claro ejemplo de movimiento oscilatorio. Cada una describe un movimiento circular uniforme, siendo la frecuencia de cada una de ellas diferente. Por ejemplo:

  - La aguja horaria describe un movimiento circular uniforme con una frecuencia de una vuelta completa cada doce horas.
  - El minutero describe un movimiento circular uniforme con una frecuencia de una vuelta completa por hora. En este sentido cabe observar que mientras la aguja horaria recién logra dar una vuelta completa, la aguja del minutero habrá dado 12 vueltas.
  - El segundero describe un movimiento circular uniforme con una frecuencia de una vuelta completa cada minuto. Es decir cuando el minutero logra dar una vuelta completa, la aguja correspondiente al segundero habrá dado 60 vueltas completas. Y mientras la aguja horaria recién logra dar una vuelta, el segundero habrá dado $60 \cdot 12 = 120$ vueltas.

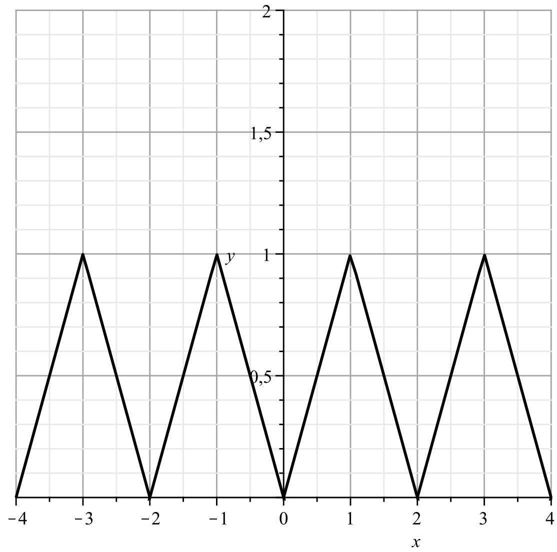
Problema 18.1.1. Intente responder las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántas vueltas completas da el segundero en el lapso de tiempo que la aguja horaria da un cuarto de vuelta?
2. ¿En qué horarios la aguja horaria y la del minutero coinciden?
3. ¿En qué horarios las tres agujas horarias coinciden?

Podríamos seguir citando un sin número de ejemplos en la vida cotidiana de fenómenos que se produzcan en forma periódica, razón por la cual aparece naturalmente la necesidad de construir ciertas funciones que sean las más apropiadas para modelar dichos fenómenos y poder así encarar algún tipo de análisis matemático de los mismos, que nos permitan hacer predicciones y sacar conclusiones sobre tales.

De esta forma surgen las Funciones Trigonométricas, las cuales pasaremos a definir y explicar en la siguiente sección.

Figura 18.1.4: Diente de Sierra



En la figura podemos apreciar un ejemplo de *función periódica* conocido como *diente de sierra* por la similitud de su gráfica con los dientes de la hoja de una sierra. Se trata de una función periódica de período $P = 2$.

18.1.2. Funciones Periódicas

Ya hemos discutido el comportamiento de las coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ de una partícula que se mueve sobre una circunferencia de radio r con movimiento circular uniforme, y observamos que ambas describen un movimiento armónico simple. El concepto de *función periódica* tiene que ver con este tipo de comportamiento, y a continuación haremos una breve definición sobre lo que entenderemos de aquí en adelante por función periódica:

Definición 18.1.2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que la misma es periódica de período P si existe un número positivo $P \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$f(x+P) = f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 18.1.1. Un ejemplo gráfico de *función periódica* lo encontramos en la llamada *diente de sierra*, que es una función periódica como la que muestra la Fig. 18.1.4. Es claro que $f(x+2) = f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, razón por la cual la misma será una función periódica de período $P = 2$ y frecuencia $F = \frac{1}{2}$. La función *diente de sierra* completa un ciclo de oscilación en el intervalo $[0, 2]$.

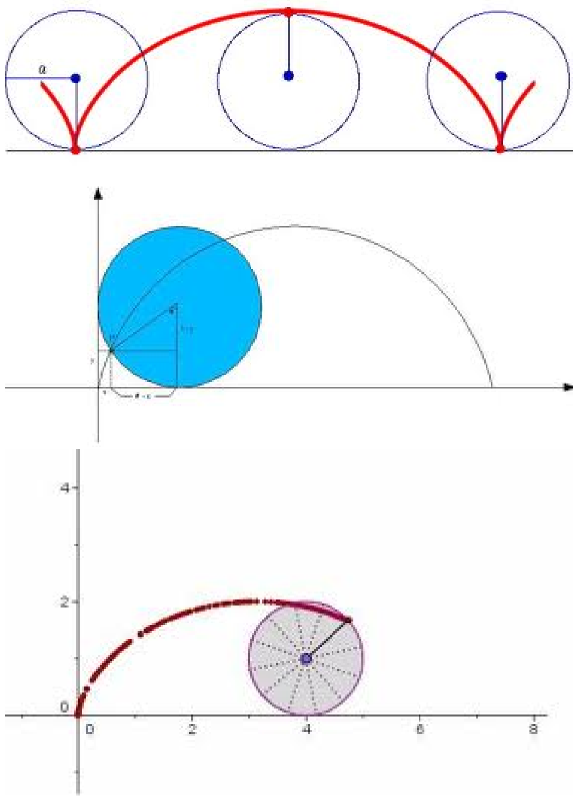
Ejemplo 18.1.2. *(Cicloide)*: A continuación veremos un típico ejemplo de función periódica llamada *cicloide*. Imaginemos que una rueda de un automóvil comienza a girar cuando el mismo se pone en marcha. Fijemos nuestra vista en el punto inferior de la misma — *precisamente aquel punto que está en contacto con el suelo al momento de arrancar el vehículo* — y pensemos que a dicho punto le hemos hecho una marca para poder seguir su evolución durante el movimiento de la rueda. Si lo siguiéramos con la vista observaríamos que la curva que describe en su movimiento tiene el aspecto que presenta la Fig. 18.1.5. Como puede observarse, la curva es una función periódica cuyo período P es igual al perímetro de la rueda, en tanto el movimiento comienza a repetirse una vez que el punto fijo sobre la misma completa una vuelta.

18.1.3. Las funciones Seno y Coseno

Definición 18.1.3. Llamaremos Circunferencia Trigonométrica a la circunferencia de radio $r = 1$. Tengamos presente que su perímetro es igual a 2π — *ver* Fig. 18.1.6.

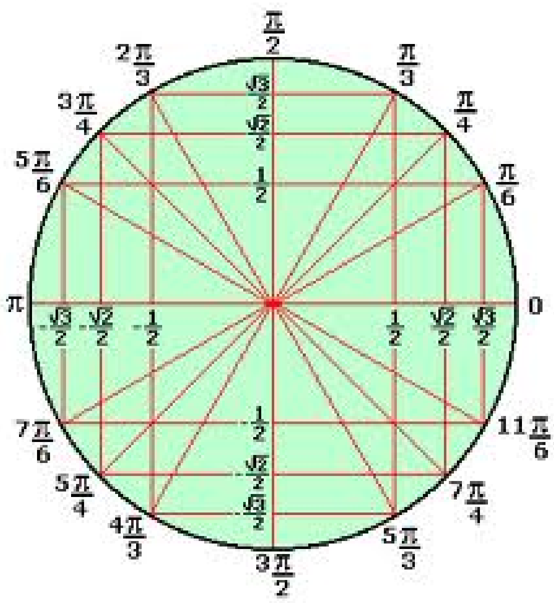
Para definir las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ procederemos como sigue. Para empezar llamaremos Eje de los Cosenos al eje horizontal y Eje de los Senos al eje vertical. Ubiquemos ahora un punto arbitrario P sobre

Figura 18.1.5: CICLOIDE



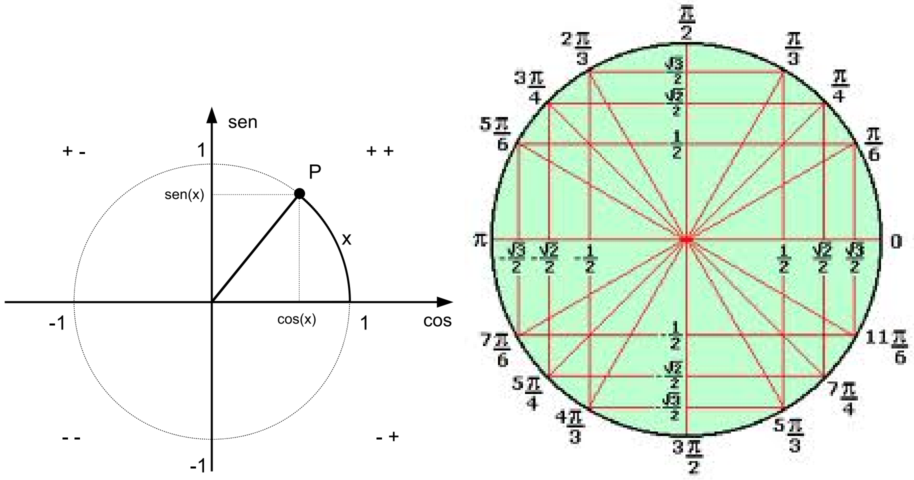
En la figura podemos apreciar la evolución de un punto fijo sobre una rueda cuando la misma comienza a girar sin deslizar sobre una recta. La curva que describe el movimiento de dicho punto se denomina *cicloide*. La *cicloide* es una función periódica cuyo período coincide con el perímetro de la rueda, en tanto el movimiento comienza a repetirse una vez que el punto fijo sobre la misma completa una vuelta.

Figura 18.1.6: CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA



En la figura podemos apreciar la circunferencia trigonométrica que no es más que la circunferencia de radio $r = 1$. La misma tiene un perímetro de 2π y podemos subdividirla en numerosos ángulos — *medidos en radianes* — tal como puede apreciarse más arriba.

Figura 18.1.7: FUNCIONES $y = \text{sen}(x)$ E $y = \cos(x)$



En la figura puede apreciarse un punto arbitrario P sobre la circunferencia unitaria en un ángulo $0 \leq x \leq 2\pi$. Para obtener el valor de $\cos(x)$ proyectaremos el punto P sobre el eje de los cosenos. Para obtener el valor de $\text{sen}(x)$ proyectaremos el punto P sobre el eje de los senos. Es claro que $\forall\, 0 \leq x \leq 2\pi$ entonces $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$ y $-1 \leq \cos(x) \leq 1$. Observemos además que los ejes dividen al plano en cuatro cuadrantes:

$$
\begin{aligned}
++ &\longrightarrow \text{sen}(x) \text{ positivo y } \cos(x) \text{ positivo.}\\
+- &\longrightarrow \text{sen}(x) \text{ positivo y } \cos(x) \text{ negativo.}\\
-- &\longrightarrow \text{sen}(x) \text{ negativo y } \cos(x) \text{ negativo.}\\
-+ &\longrightarrow \text{sen}(x) \text{ negativo y } \cos(x) \text{ positivo.}
\end{aligned}
$$

la circunferencia unitaria en un ángulo $0 \leq x \leq 2\pi$. Para obtener el valor de $\cos(x)$ proyectaremos el punto P sobre el eje de los cosenos. Para obtener el valor de $\text{sen}(x)$ proyectaremos el punto P sobre el eje de los senos — *ver* FIG. 18.1.7.

Mediante la ayuda de la FIG. 18.1.7 podemos construir una tabla contemplando los valores usuales para las funciones trigonométricas $\text{sen}(x)$ y $\cos(x)$:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$\text{sen}(x)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

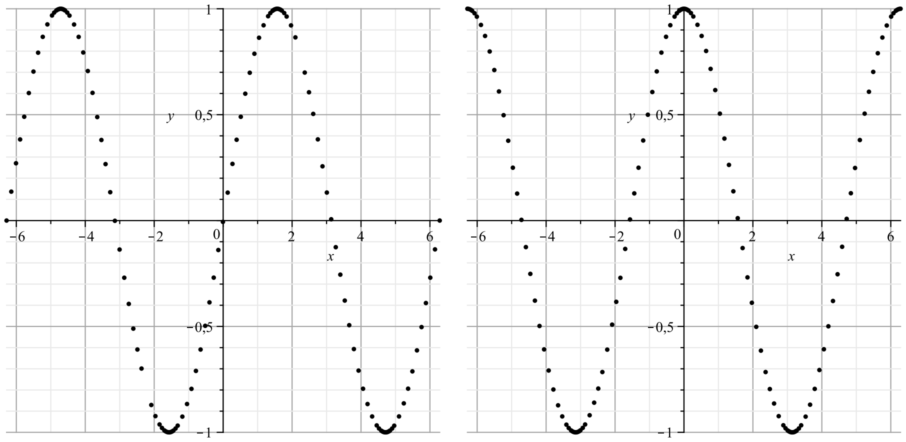
También ayudados por la FIG. 18.1.7 podemos construir una tabla contemplando otros valores de importancia para las funciones $\text{sen}(x)$ y $\cos(x)$:

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$
$\text{sen}(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Si vertemos los puntos de las tablas anteriores en un gráfico, el aspecto de las funciones $\text{sen}(x)$ y $\cos(x)$ sería similar al que puede apreciarse en la FIG. 18.1.8 .

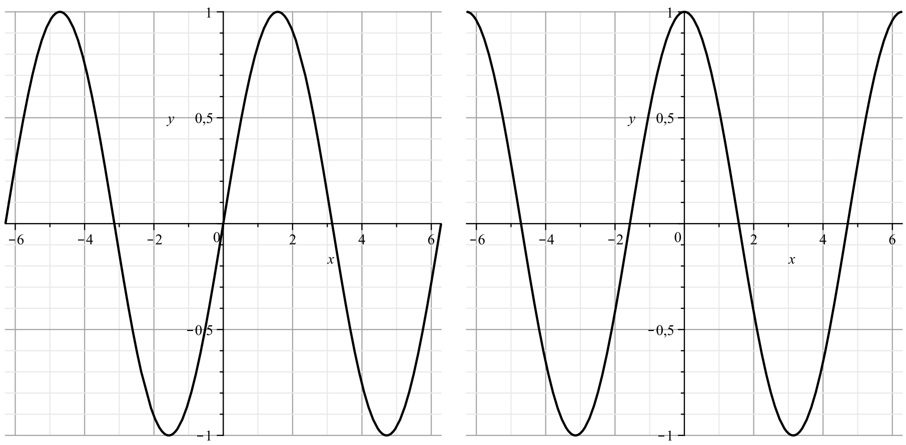
Si unimos los puntos de la FIG. 18.1.8 mediante un trazo continuo, obtendríamos los gráficos de las funciones $\text{sen}(x)$ y $\cos(x)$, tal como puede apreciarse en la FIG. 18.1.9 .

Figura 18.1.8: FUNCIONES $y = \text{sen}\,(x)$ E $y = \cos\,(x)$



En la figura pueden apreciarse una serie de puntos de las funciones $\text{sen}\,(x)$ y $\cos\,(x)$.

Figura 18.1.9: FUNCIONES $y = \text{sen}\,(x)$ E $y = \cos\,(x)$



En la figura pueden apreciarse las funciones $y = \text{sen}\,(x)$ e $y = \cos\,(x)$.

18.1.4. La función Tangente

Otra función trigonométrica importante es la función $y = \tan(x)$ que se define según:

$$\tan : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

El dominio de la función $\tan(x)$ es:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) \neq 0\}$$

pues cada vez que la función $\cos(x)$ se anule, el denominador involucrado en la función $\tan(x)$ se anularía y produciría una asíntota vertical. Para determinar aquellos puntos donde $\cos(x) = 0$, basta observar que en el intervalo $[0, 2\pi]$ la función $\cos(x)$ tiene solamente dos ceros:

$$x = \frac{\pi}{2} \qquad x = \frac{3}{2}\pi$$

Como la función $\cos(x)$ es periódica de período $P = 2\pi$ entonces el conjunto de ceros de la misma será:

$$C_0 = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Pero entonces es fácil comprobar que:

$$A = \operatorname{Dom}(\tan(x)) = \mathbb{R} - C_0$$

En cada uno de los ceros de la función $\cos(x)$, la función $\tan(x)$ tendrá una asíntota vertical. Ayudados con las tablas hechas para graficar las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ podríamos fácilmente confeccionar una tabla de valores para la función $\tan(x)$, como sigue:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$\operatorname{sen}(x)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$	0	1	$\nexists$	-1	0	1	$\nexists$	-1	0

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$
$\operatorname{sen}(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Si vertemos los puntos de las tablas anteriores en un gráfico, el aspecto de las función $y = \tan(x)$ sería similar al que puede apreciarse en la Fig. 18.1.10 .

Si unimos los puntos de la Fig. 18.1.10 mediante un trazo continuo, obtendríamos el gráfico de las función $y = \tan(x)$, tal como puede apreciarse en la Fig. 18.1.11 .

18.1.5. Otras funciones trigonométricas

Además de las funciones trigonométricas usuales como ser:

$$y = \operatorname{sen}(x) \qquad y = \cos(x) \qquad y = \tan(x)$$

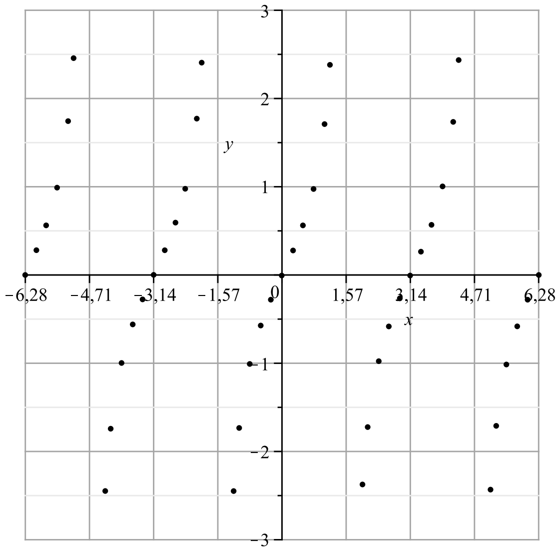
definidas en las dos secciones anteriores, existen otras funciones trigonométricas de interés. Las mismas son:

$$\sec : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\operatorname{cosec} : C \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

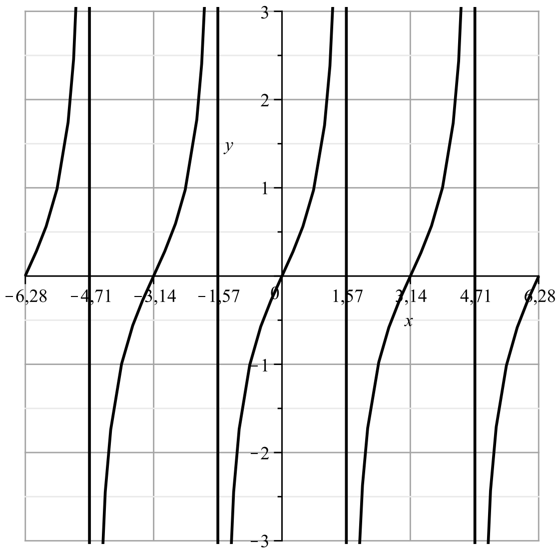
$$\operatorname{cotan} : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

Figura 18.1.10: Función $\tan(x)$



En la figura puede apreciarse una serie de puntos de la función $y = \tan(x)$.

Figura 18.1.11: Función $\tan(x)$



En la figura puede apreciarse el gráfico de la función $y = \tan(x)$.

Ejercicio 18.1.1. Teniendo presente que las funciones $y = \text{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$ son periódicas de período $P = 2\pi$, establezca los conjuntos de ceros de ambas funciones. A partir de estos conjuntos de ceros, determine los dominios de las funciones $y = \sec(x)$, $y = \text{cosec}(x)$ e $y = \text{cotan}(x)$.

Ejercicio 18.1.2. De la misma forma que procedimos con la función $y = \tan(x)$ para obtener su tabla de valores a partir de las tablas de valores de las funciones $y = \text{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$, complete las siguientes tablas a los efectos de trazar los gráficos de las funciones $y = \sec(x)$, $y = \text{cosec}(x)$ e $y = \text{cotan}(x)$:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$\text{sen}(x)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\sec(x)$									
$\text{cosec}(x)$									
$\text{cotan}(x)$									

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$
$\text{sen}(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sec(x)$								
$\text{cosec}(x)$								
$\text{cotan}(x)$								

Si utilizamos los valores obtenidos en las tablas anteriores, podemos hacer los gráficos de las funciones $y = \sec(x)$, $y = \text{cosec}(x)$ e $y = \text{cotan}(x)$ procediendo análogamente a como hicimos con las funciones $y = \text{sen}(x)$, $y = \cos(x)$ e $y = \tan(x)$ — *ver* Fig. 18.1.12.

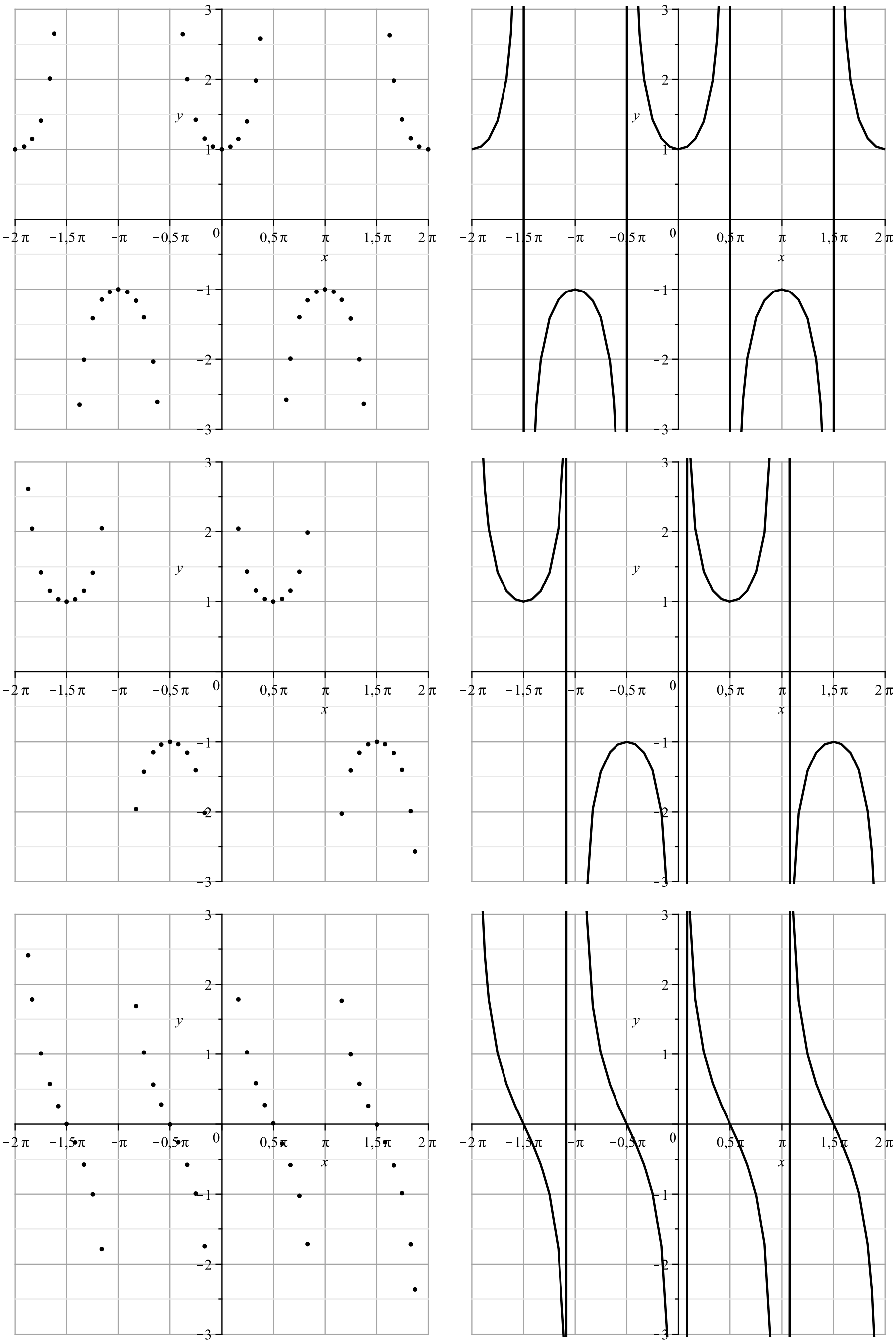
18.2. Ejercicios

1. Sea la función $f(x) = \text{sen}(x)$ para $x \in [-2\pi, 6\pi]$. Hallar analíticamente los $x \in \text{Dom}(f)$ para los cuales la función alcanza su máximo y su mínimo.

2. Construir el gráfico de la función $f(x) = \cos(x)$ para $x \in [-5\pi, 3\pi]$ y hallar analíticamente su conjunto de ceros.

3. A continuación se ofrece un gráfico de las funciones $y = \text{sen}(x)$, $y = \cos(x)$ e $y = \tan(x)$ en un mismo sistema de ejes coordenados. Colocar los valores en el eje x y en el eje y según corresponda:

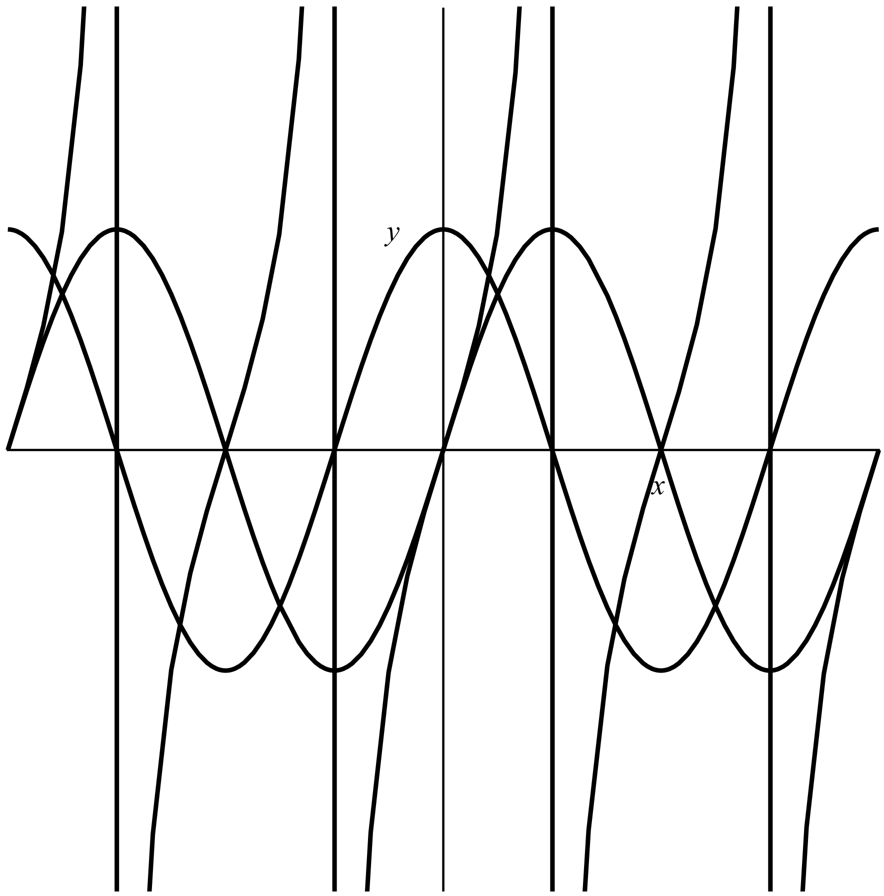
Figura 18.1.12: FUNCIONES $y = \sec(x)$, $y = \operatorname{cosec}(x)$ E $y = \operatorname{cotan}(x)$



En la figura pueden apreciarse los gráficos de las funciones:

$y = \sec(x)$	$\leftarrow$	Arriba
$y = \operatorname{cosec}(x)$	$\leftarrow$	Centro
$y = \operatorname{cotan}(x)$	$\leftarrow$	Abajo

.



4. Teniendo presentes los gráficos de las funciones trigonométricas y la información resumida en la siguiente tabla:

	$y = \operatorname{sen}(x)$	$y = \cos(x)$	$y = \tan(x)$
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} - \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}\right\}$
Imagen	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$
Ceros	$x = k\pi : k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}$	$x = k\pi : k \in \mathbb{Z}$
Asíntotas	no tiene	no tiene	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}$

contestar las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el período de cada una de las funciones?

b) Los ceros de $y = \tan(x)$ coinciden con los ceros de $y = \operatorname{sen}(x)$. ¿Por qué?

c) Las asíntotas de $y = \tan(x)$ se encuentran en aquellos valores de x en que $y = \cos(x)$ tiene sus ceros. ¿Por qué?

d) ¿En qué valores de x es $\tan(x) = 1$? ¿Qué se observa gráficamente? ¿Qué relación existe entre el seno y el coseno en esos valores?

e) ¿En qué valores de x es $\tan(x) = -1$? ¿Qué se observa gráficamente? ¿Qué relación existe entre el seno y el coseno en esos valores?

5. Determinar analíticamente aquellos valores de x en los cuales:

a) $\tan(x) = 1$

b) $\tan(x) = -1$

6. Determinar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a)
$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} \qquad x \in [-\pi, 3\pi]$$

b)
$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

c)
$$\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad x \in [-2\pi, 2\pi]$$

d)
$$\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

e)
$$\tan(x) = \sqrt{3} \qquad x \in [-3\pi, \pi]$$

f)
$$\tan(x) = \sqrt{3} \qquad x \in \mathbb{R}$$

7. Para cada una de las siguientes funciones, hallar el su conjunto de ceros, su imagen, máximos, mínimos y valores máximos y mínimos respectivamente. Con la información obtenida haga un gráfico de las mismas.

a)
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = 2\cos(x)$$

b)
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = -2\cos(x)$$

c)
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$$

d)
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = -\frac{1}{2}\cos(x)$$

e)
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = 3\operatorname{sen}(x)$$

f)
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = -3\operatorname{sen}(x)$$

g)
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(x)$$

h)

$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = -\frac{1}{3}\operatorname{sen}(x)$$

8. Para cada una de las siguientes funciones, hallar su conjunto de ceros, imagen, máximos, mínimos y valores máximos y mínimos respectivamente. Con la información obtenida haga un gráfico de las mismas.

   a)

   $$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos(2x)$$

   b)

   $$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos(-2x)$$

   c)

   $$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

   d)

   $$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos\left(-\frac{1}{2}x\right)$$

   e)

   $$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \operatorname{sen}(3x)$$

   f)

   $$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \operatorname{sen}(-3x)$$

   g)

   $$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}x\right)$$

   h)

   $$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \operatorname{sen}\left(-\frac{1}{3}x\right)$$

9. Para cada una de las siguientes funciones, hallar su conjunto de ceros, imagen, máximos, mínimos y valores máximos y mínimos respectivamente. Con la información obtenida haga un gráfico de las mismas.

   a)

   $$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

   b)

   $$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

   c)

   $$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$$

d)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)$$

e)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

f)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

g)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$$

h)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)$$

10. Para cada una de las siguientes funciones, hallar su conjunto de ceros, imagen, máximos, mínimos y valores máximos y mínimos respectivamente. Con la información obtenida haga un gráfico de las mismas.

a)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos(x) + 2$$

b)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos(x) - 2$$

c)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos(x) - 1$$

d)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos(x) + 1$$

e)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \operatorname{sen}(x) + 3$$

f)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \operatorname{sen}(x) - 3$$

g)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \operatorname{sen}(x) + 4$$

h)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \operatorname{sen}(x) - 4$$

11. Para cada una de las siguientes funciones, hallar su conjunto de ceros, imagen, máximos, mínimos y valores máximos y mínimos respectivamente. Con la información obtenida haga un gráfico de las mismas.

    a)
    $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = 2\operatorname{sen}(x) - 1$$

    b)
    $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \operatorname{sen}(2x) - 1$$

    c)
    $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$$

    d)
    $$f : [-3\pi, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = 2\cos(x) - 1$$

    e)
    $$f : [-2\pi, 3\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = 2\operatorname{sen}(x) + 1$$

    f)
    $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = 2\cos(x) - \sqrt{2}$$

    g)
    $$f : [0, 4\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = 2\operatorname{sen}(2x)$$

    h)
    $$f : \left[\frac{\pi}{2}, 3\pi\right] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

    i)
    $$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$$

    j)
    $$f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = -2\operatorname{sen}(x) + 1$$

    k)
    $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \operatorname{sen}(-x) + 1$$

    l)
    $$f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \qquad f(x) = -3\cos(x)$$

12. Determinar el conjunto de ceros de las siguientes funciones, realizar un gráfico aproximado y definir el conjunto imagen:

    a)
    $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = |\operatorname{sen}(x)|$$

b)

$$g:\mathbb{R}-\left\{\frac{2k+1}{2}\pi:\ k\in\mathbb{Z}\right\}\longrightarrow\mathbb{R} \qquad g(x)=\frac{|\cos(x)|}{\cos(x)}$$

c)

$$h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \qquad h(x)=\begin{cases}\cos(2x) & \text{si } x\le\frac{\pi}{2}\\ 1+\operatorname{sen}(x) & \text{si } x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

d)

$$k:[-2\pi,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R} \qquad k(x)=\cos^2(x)-1$$

13. Determinar analítica y gráficamente los puntos de encuentro entre las funciones:

a)

$$f:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,f(x)=\operatorname{sen}(x) \qquad g:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,g(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

b)

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,f(x)=2+\operatorname{sen}(x) \qquad g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,g(x)=\cos(x)-2$$

14. Verificar las siguientes identidades:

a)

$$\operatorname{cosec}(x)-\operatorname{sen}(x)=\operatorname{cotan}(x)\cos(x)$$

b)

$$\frac{\tan(x)\,(1-\operatorname{sen}(x))\,(1+\operatorname{sen}(x))}{\cos(x)}=\operatorname{sen}(x)$$

c)

$$\operatorname{cosec}^2(x)-\operatorname{cotan}^2(x)=1$$

d)

$$\frac{\operatorname{sen}(x)\tan(x)+\frac{1}{2}}{1-\cos(x)}-\frac{\cos(x)+\frac{1}{2}}{1+\cos(x)}=\sec(x)+\operatorname{cosec}^2(x)$$

15. Comprobar las siguientes identidades:

a)

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$$

b)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{sen}(x)$$

16. Calcular en forma exacta, sin utilizar calculadora:

a)

$$\operatorname{sen}(15°)=$$

b)

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=$$

c)

$$\tan(75°)=$$

17. Demostrar las siguientes identidades, a partir de aquellas vistas en la teoría complementaria:

a)
$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$

b)
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$

c)
$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

d)
$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

e)
$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

f)
$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}$$

g)
$$\cos^2(x) - \cos(2x) = \frac{\tan(x)\operatorname{sen}(2x)}{2}$$

h)
$$\sqrt{\frac{1-\cos(2x)}{2}} = \operatorname{sen}(x)$$

18.3. Teoría Complementaria

18.3.1. Propiedades de las funciones $y = \operatorname{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$

Las funciones trigonométricas $y = \operatorname{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$ gozan de una serie de importantes propiedades, las cuales son necesarias conocer para una correcta aplicación de las mismas, así como también para poder operar con ellas cuando sea necesario.

Por tratarse de funciones cuya evaluación es difícil — *teniendo presente que no provienen de expresiones algebraicas cerradas como la mayoría del resto de las funciones elementales* — entonces el conocimiento de las propiedades que gobiernan el comportamiento de las mismas es fundamental para poder trabajar con ellas.

18.3.1.1. Periodicidad

La propiedad de periodicidad de las funciones $y = \operatorname{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$ es una de las propiedades fundamentales de las mismas, que se desprende inmediatamente del mecanismo para construirlas. Como los valores de ambas provienen del análisis de las coordenadas de los puntos de la circunferencia trigonométrica — *la cual tiene un perímetro de* 2π — entonces es claro que luego de completar una vuelta sobre la misma los valores tanto del $\operatorname{sen}(x)$ como del $\cos(x)$ comenzarán a repetirse. El período P de las mismas será entonces $P = 2\pi$, de donde:

$$\operatorname{sen}(x+2k\pi) = \operatorname{sen}(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, k \in \mathbb{Z}$$
$$\cos(x+2k\pi) = \cos(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 18.3.1. Si quisiéramos calcular los valores de $\operatorname{sen}\left(\frac{25}{6}\pi\right)$ y $\cos\left(\frac{25}{6}\pi\right)$, debemos proceder como sigue:

Tengamos presente que:

$$\frac{25}{6}\pi = \frac{24}{6}\pi + \frac{1}{6}\pi = 4\pi + \frac{\pi}{6}$$

Como 4π es múltiplo de 2π entonces podemos utilizar la propiedad de periodicidad para obtener:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{25}{6}\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\cos\left(\frac{25}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ejercicio 18.3.1. Determine los valores de $\operatorname{sen}\left(\frac{19}{3}\pi\right)$ y $\cos\left(\frac{19}{3}\pi\right)$.

18.3.1.2. Las funciones seno y coseno son acotadas

Definición 18.3.1. Diremos que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es *acotada* cuando exista una cierta constante positiva C tal que:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ |f(x)| \leq C$$

Por definición, los valores de las funciones $y = \operatorname{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$ están comprendidos entre -1 y 1, es decir:

$$-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$$
$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

de donde:

$$|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$$
$$|\cos(x)| \leq 1$$

y por lo tanto ambas funciones se encuentran acotadas.

18.3.1.3. Conjunto de ceros

Para obtener los conjuntos de ceros de las funciones seno y coseno debemos utilizar la propiedad de periodicidad, que nos autorizará a estudiar los ceros de las mismas en el intervalo fundamental $[0, 2\pi]$ y deducir el resto de los ceros a partir de los contenidos en dicho intervalo. Por ejemplo, sabemos que:

$$\operatorname{sen}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee\ x = \pi \ \vee\ x = 2\pi$$
$$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \ \vee\ x = \frac{3}{2}\pi$$

Como los valores de dichas funciones se repiten al sumar múltiplos enteros de 2π, entonces podemos concluir que la distancia entre dos ceros consecutivos de las funciones $y = \operatorname{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$ es de π.

Así:

$$C_0(\operatorname{sen}) = \{k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\} = \{0,\ -\pi,\ \pi,\ -2\pi,\ 2\pi, -3\pi,\ 3\pi,\ \cdots\}$$
$$C_0(\cos) = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ -\frac{3}{2}\pi,\ \cdots\right\}$$

18.3.1.4. Máximos y Mínimos

Para obtener los máximos y mínimos de la función $y = \operatorname{sen}(x)$, debemos tener presente que en el intervalo $[0, 2\pi]$ la misma alcanza su máximo absoluto en $x = \frac{\pi}{2}$ — *donde la misma toma el valor* 1 — y su mínimo absoluto en $x = \frac{3}{2}\pi$ — *donde la misma toma el valor* -1. Como la distancia entre dos máximos o mínimos consecutivos es de 2π, entonces concluimos que:

$$\begin{aligned} \text{máx}(\operatorname{sen}) &= \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \\ \text{mín}(\operatorname{sen}) &= \left\{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

Para obtener los máximos y mínimos de la función $y = \cos(x)$, debemos tener presente que en el intervalo $[0, 2\pi]$ la misma alcanza su máximo absoluto en $x = 0$ — *donde la misma toma el valor* 1 — y su mínimo absoluto en $x = \pi$ — *donde la misma toma el valor* -1. Como la distancia entre dos máximos o mínimos consecutivos es de 2π, entonces concluimos que:

$$\begin{aligned} \text{máx}(\cos) &= \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\ \text{mín}(\cos) &= \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

18.3.1.5. Imagen

Ya hemos observado previamente que las funciones $y = \operatorname{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$ se encuentran acotadas según:

$$\begin{aligned} -1 \le \operatorname{sen}(x) \le 1 \\ -1 \le \cos(x) \le 1 \end{aligned}$$

En realidad las mismas alcanzan todos los valores comprendidos entre -1 y 1, de donde:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\operatorname{sen}) &= [-1, 1] \\ \operatorname{Im}(\cos) &= [-1, 1] \end{aligned}$$

18.3.1.6. Simetrías según los cuadrantes

Definición 18.3.2. Si observamos la Fig. 18.1.7, podemos ver inmediatamente que el plano $\mathbb{R}^2$ queda subdividido en cuatro cuadrantes que rotulamos según: $++$, $+-$, $--$ y $-+$. El nombre de estos cuadrantes no ha sido elegido al azar, por el contrario el signo a la izquierda corresponde al signo que toma la función $y = \operatorname{sen}(x)$ en dicho cuadrante, mientras que el signo ubicado a la derecha corresponde al signo que toma la función $y = \cos(x)$ en el mencionado cuadrante.

De un simple análisis de la Fig. 18.1.7, podemos concluir las simetrías fundamentales producidas en las funciones $y = \operatorname{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$, según el cuadrante donde se encuentre el ángulo x medido en radianes. En concreto, si $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ — *es decir x pertenece al cuadrante* $++$ — entonces:

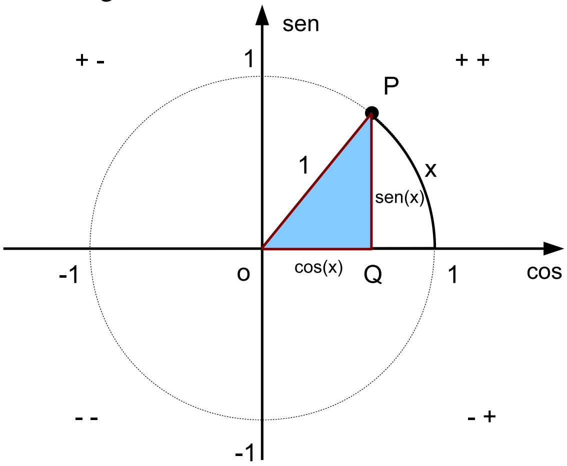
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\pi - x) &= \operatorname{sen}(x) & \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\ \operatorname{sen}(\pi + x) &= -\operatorname{sen}(x) & \cos(\pi + x) &= -\cos(x) \\ \operatorname{sen}(2\pi - x) &= -\operatorname{sen}(x) & \cos(2\pi - x) &= \cos(x) \end{aligned}$$

Ejemplo 18.3.2. Veamos cómo utilizar las simetrías fundamentales para calcular los valores de $\operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}\pi\right)$ y $\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)$:

Para empezar observemos que:

$$\frac{5}{3}\pi = 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

Figura 18.3.1: Propiedad Pitagórica



En la figura puede observarse que el triángulo $o\overset{\triangle}{P}Q$ es rectángulo, tiene catetos $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ e hipotenusa 1, de donde se deduce la importante propiedad que afirma:

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

con lo cual deducimos que $\frac{5}{3}\pi$ es la diferencia entre 2π y el valor $\frac{\pi}{3}$ correspondiente a un ángulo perteneciente al cuadrante $++$. Pero entonces:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 18.3.2. Utilice las ideas presentadas previamente más la identidad pitagórica para completar — *sin consultar la tabla de valores ni utilizar calculadora* — las siguientes tablas de valores para las funciones $y = \operatorname{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$\operatorname{sen}(x)$	0		1						
$\cos(x)$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$							

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$
$\operatorname{sen}(x)$	$\frac{1}{2}$							
$\cos(x)$		$\frac{1}{2}$						

18.3.1.7. Identidad pitagórica

Si observa la Fig. 18.3.1, verá que el triángulo rectángulo $o\overset{\triangle}{P}Q$ tiene catetos $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$ e hipotenusa 1. Aplicando el Teorema de Pitágoras obtenemos:

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

que es una de las propiedades fundamentales de las funciones trigonométricas $y = \operatorname{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$.

De la identidad pitagórica surgen otras dos importantes identidades:

$$\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$
$$\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$$

18.3.1.8. Otras identidades importantes

Además de la identidad pitagórica hay importantes propiedades válidas para el seno y coseno de la suma de dos ángulos, a saber:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x+y) &= \operatorname{sen}(x)\cos(y)+\cos(x)\operatorname{sen}(y)\\
\operatorname{sen}(x-y) &= \operatorname{sen}(x)\cos(y)-\cos(x)\operatorname{sen}(y)\\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y)-\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\\
\cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y)+\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)
\end{aligned}$$

Las propiedades anteriores no son fáciles de demostrar, pero son válidas y podremos utilizarlas para resolver los distintos ejercicios donde las mismas sean de utilidad. Veremos a continuación algunos ejemplos donde se podrá observar la importancia de las mismas para hacer deducciones sobre los valores que toman las funciones $y = \operatorname{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$, en ángulos poco usuales.

Ejemplo 18.3.3. Deducir el valor de $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)$ y $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Solución:

Para empezar, observemos que:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)\\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)\\
&= 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)
\end{aligned}$$

Pero entonces:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos:

$$\frac{2}{4} = 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

y recordando que:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

resulta:

$$\frac{1}{8} = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

Multipliquemos ahora ambos miembros por 8 para obtener una ecuación equivalente pero más sencilla:

$$\begin{aligned}
8\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) &= 1\\
\Leftrightarrow 8\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{8}\right)-8\operatorname{sen}^4\left(\frac{\pi}{8}\right)-1 &= 0\\
\Leftrightarrow 8\operatorname{sen}^4\left(\frac{\pi}{8}\right)-8\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+1 &= 0
\end{aligned}$$

Llamemos ahora:

$$x = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

y reemplacemos este valor en la ecuación anterior, obteniendo:

$$\boxed{8x^2 - 8x + 1 = 0}$$

Las raíces de esta cuadrática son:

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \qquad x_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Como $x = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$, entonces las posibilidades son:

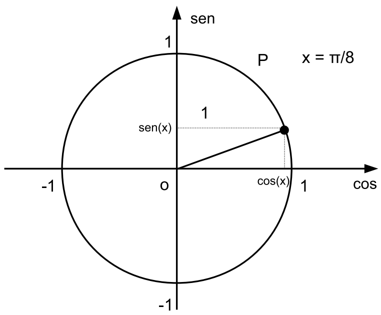
$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \qquad \vee \qquad \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

o equivalentemente:

$$\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} \vee \boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

Sólo nos falta decidir cuál de estos dos valores es el correcto, para lo cual haremos el siguiente razonamiento:

- Uno de aquellos dos valores corresponde al $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)$ y el otro al $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, pues la suma de sus cuadrados es igual a 1.
- Mediante el siguiente gráfico observamos que para el ángulo $\frac{\pi}{8}$, el valor del coseno tiene que ser mayor al valor del seno:



- Concluimos entonces que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Finalmente:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Ejemplo 18.3.4. Demostrar las identidades:

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$

Solución:

Recordemos primero las identidades:

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y)$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$$

Para demostrar que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$ podemos utilizar la primera reemplazando y por x:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x+x) &= \operatorname{sen}(x)\cos(x) + \cos(x)\operatorname{sen}(x)\\ &= 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)\end{aligned}$$

Para demostrar que $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$ podemos utilizar la segunda reemplazando y por x:

$$\begin{aligned}\cos(x+x) &= \cos(x)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x)\\ &= \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)\end{aligned}$$

18.3.1.9. La función seno es impar

Definición 18.3.3. Diremos que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es *impar* siempre que:

$$f(-x) = -f(x) \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Demostraremos a continuación que la función $y = \operatorname{sen}(x)$ es impar. En efecto:

$$\operatorname{sen}(-x) = \operatorname{sen}(2\pi - x) = -\operatorname{sen}(x)$$

en virtud de las propiedades de simetría con respecto a los cuadrantes.

18.3.1.10. La función coseno es par

Definición 18.3.4. Diremos que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es *par* siempre que:

$$f(-x) = f(x) \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Demostraremos a continuación que la función $y = \cos(x)$ es par. En efecto:

$$\cos(-x) = \cos(2\pi - x) = \cos(x)$$

en virtud de las propiedades de simetría con respecto a los cuadrantes.

18.3.2. Ecuaciones trigonométricas

Definición 18.3.5. Una *ecuación trigonométrica* es una ecuación que involucre funciones trigonométricas como ser $y = \operatorname{sen}(x)$, $y = \cos(x)$, $y = \tan(x)$, etc...

Por ejemplo:

$$2\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

Ejemplo 18.3.5. Consideremos la siguiente ecuación trigonométrica:

$$2\operatorname{sen}(x) = 1 \tag{18.3.1}$$

Para resolverla hay que tener presente las siguientes indicaciones:

- Primero debemos buscar la o las soluciones pertenecientes al intervalo fundamental $[0, 2\pi]$.

  En el caso de la ecuación (18.3.1), como la misma es equivalente a:

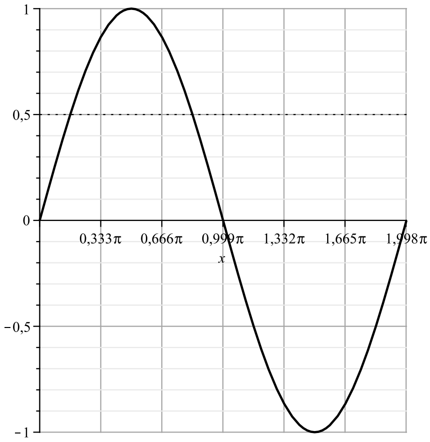
  $$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2}$$

  entonces las soluciones pertenecientes al intervalo $[0, 2\pi]$ serán:

  $$x_1 = \frac{\pi}{6} \qquad\qquad x_2 = \frac{5}{6}\pi$$

  — *ver* FIG. 18.3.2.

Figura 18.3.2: Soluciones fundamentales de una ecuación trigonométrica



En la figura puede apreciarse que las soluciones fundamentales de la ecuación $2\operatorname{sen}(x) = 1$ son:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} \qquad\qquad x_2 = \frac{5}{6}\pi$$

- Debido a la periodicidad de la función $y = \operatorname{sen}(x)$, si a una solución determinada le sumamos un múltiplo entero de 2π entonces el resultado será también solución de la ecuación original. De esta manera podemos hallar la solución general como:

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5}{6}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Ejemplo 18.3.6. Determinar analíticamente el conjunto solución de la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\tan(x) = \sqrt{3} \qquad\qquad x \in [-3\pi, \pi] \tag{18.3.2}$$

- Para empezar observemos que la función $y = \tan(x)$ es periódica de período $P = \pi$, y su intervalo fundamental de definición — *donde realiza un ciclo completo* — es el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Debemos entonces buscar la solución a la ecuación (18.3.2) que se encuentra en dicho intervalo.

De acuerdo con la tabla de valores para la función tangente, sabemos que:

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

Pero entonces la única solución existente en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ es:

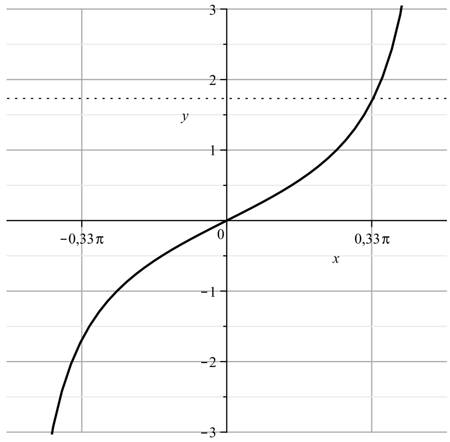
$$x_1 = \frac{\pi}{3}$$

— *ver* Fig. 18.3.3.

- Ahora debemos determinar la solución general de la ecuación (18.3.2) sobre $\mathbb{R}$. Como el período de la función tangente es $P = \pi$, entonces si a x_1 le sumamos un múltiplo entero de π, obtendremos nuevas soluciones. De esto último se desprende que la solución general sobre $\mathbb{R}$ es:

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbb{R}\right\}$$

Figura 18.3.3: Solución fundamental de la ecuación $\tan(x) = \sqrt{3}$



En la figura puede apreciarse que la solución fundamental de la ecuación $\tan(x) = \sqrt{3}$ es:

$$x = \frac{\pi}{3}$$

- La solución general sobre todo $\mathbb{R}$ — $S_{\mathbb{R}}$ — no es la solución de la ecuación original, pues la misma está sujeta a que $x \in [-3\pi, \pi]$. Lo que debemos hacer a continuación es extraer de $S_{\mathbb{R}}$ aquellas soluciones que pertenezcan al intervalo $[-3\pi, \pi]$, y descartar aquellas que no pertenezcan al mismo.

  El procedimiento para conseguir esto último es muy sencillo. Para empezar, observemos que las soluciones contenidas en $S_{\mathbb{R}}$ podemos caracterizarlas según:

$$x_k = \frac{\pi}{3} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z}$$

  Debemos determinar cuáles valores de $k \in \mathbb{Z}$ determinan soluciones en el rango $-3\pi \leq x_k \leq \pi$. Esto implica resolver la siguiente inecuación:

$$\begin{aligned} -3\pi \leq & \quad x_k & \leq \pi \\ \Leftrightarrow -3\pi \leq & \quad \tfrac{\pi}{3} + k\pi & \leq \pi \\ \Leftrightarrow -3\cancel{\pi} \leq & \quad \cancel{\pi}\left(\tfrac{1}{3} + k\right) & \leq \cancel{\pi} \\ \Leftrightarrow -3 \leq & \quad \tfrac{1}{3} + k & \leq 1 \\ \Leftrightarrow -3 - \frac{1}{3} \leq & \quad k & \leq 1 - \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow -\frac{10}{3} \leq & \quad k & \leq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

  De esta forma determinamos que los valores de $k \in \mathbb{Z}$ para que $x_k \in [-3\pi, \pi]$ deben estar comprendidos en el rango:

$$\begin{aligned} -\frac{10}{3} \leq k \leq \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow -3{,}33\cdots \leq k \leq 0{,}66\cdots \end{aligned}$$

  ¿Cuáles son los números $k \in \mathbb{Z}$ comprendidos en dicho rango?

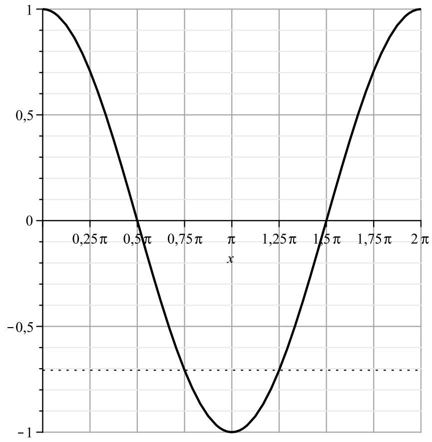
  La respuesta es sencilla:

$$k \in \{-3, -2, -1, 0\}$$

  El conjunto solución de la ecuación (18.3.2) lo hallamos finalmente reemplazando en:

$$x_k = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Figura 18.3.4: Soluciones fundamentales de la ecuación $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



En la figura puede apreciarse que las soluciones fundamentales de la ecuación $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ son:

$$x_1 = \frac{3}{4}\pi \qquad\qquad x_2 = \frac{5}{4}\pi$$

por los valores de k hallados, resultando:

$$\begin{aligned} x_{-3} &= \frac{\pi}{3} - 3\pi = -\frac{8}{3}\pi \\ x_{-2} &= \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5}{3}\pi \\ x_{-1} &= \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2}{3}\pi \\ x_0 &= \frac{\pi}{3} + 0\pi = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Así: El conjunto solución de la ecuación (18.3.2) es:

$$S = \left\{-\frac{8}{3}\pi,\ -\frac{5}{3}\pi,\ -\frac{2}{3}\pi,\ \frac{\pi}{3}\right\}$$

Ejemplo 18.3.7. Resolver la ecuación:

$$\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

sobre el intervalo $[-\pi, 4\pi]$.

- Para empezar, determinemos como siempre las soluciones fundamentales pertenecientes al intervalo $[0, 2\pi]$. Las mismas son:

  $$x_1 = \frac{3}{4}\pi \qquad\qquad x_2 = \frac{5}{4}\pi$$

  tal como puede apreciarse en la Fig. 18.3.4.

- Con estas dos soluciones pertenecientes al intervalo $[0, 2\pi]$ y utilizando la periodicidad de la función $\cos(x)$, cuyo período $P = 2\pi$, podemos establecer el conjunto solución sobre todos los números reales $\mathbb{R}$ como sigue:

  $$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5}{4}\pi + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

- Tal como procedimos en el ejemplo anterior, ahora debemos determinar cuáles de estas soluciones pertenecen al intervalo $[-\pi, 4\pi]$, resolviendo una inecuación para cada uno de los juegos de soluciones:

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{3}{4}\pi + 2k\pi : \ k \in \mathbb{Z} \\ z_k &= \frac{5}{4}\pi + 2k\pi : \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

  - Del primer juego de soluciones surge:

$$\begin{array}{rcl} -\pi \leq & x_k & \leq 4\pi \\ \Leftrightarrow -\pi \leq & \frac{3}{4}\pi + 2k\pi & \leq 4\pi \\ \Leftrightarrow -\pi - \dfrac{3}{4}\pi \leq & 2k\pi & \leq 4\pi - \dfrac{3}{4}\pi \\ \Leftrightarrow -\dfrac{7}{4}\cancel{\pi} \leq & 2k\cancel{\pi} & \leq \dfrac{13}{4}\cancel{\pi} \\ \Leftrightarrow -\dfrac{7}{4} \leq & 2k & \leq \dfrac{13}{4} \\ \Leftrightarrow -\dfrac{7}{8} \leq & k & \leq \dfrac{13}{8} \end{array}$$

  Así, los valores posibles de $k \in \mathbb{Z}$ deben estar en el rango:

$$\begin{aligned} -\frac{7}{8} \leq k \leq \frac{13}{8} \\ \Leftrightarrow -0{,}875 \leq k \leq 1{,}625 \end{aligned}$$

  y los mismos son:

$$k \in \{0, \ 1\}$$

  Pero entonces las soluciones obtenidas en esta primera etapa son:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{3}{4}\pi + 0 = \frac{3}{4}\pi \\ x_1 &= \frac{3}{4}\pi + 2\pi = \frac{11}{4}\pi \end{aligned}$$

  - Del segundo y último juego de soluciones surge:

$$\begin{array}{rcl} -\pi \leq & y_k & \leq 4\pi \\ \Leftrightarrow -\pi \leq & \frac{5}{4}\pi + 2k\pi & \leq 4\pi \\ \Leftrightarrow -\pi - \dfrac{5}{4}\pi \leq & 2k\pi & \leq 4\pi - \dfrac{5}{4}\pi \\ \Leftrightarrow -\dfrac{9}{4}\cancel{\pi} \leq & 2k\cancel{\pi} & \leq \dfrac{11}{4}\cancel{\pi} \\ \Leftrightarrow -\dfrac{9}{4} \leq & 2k & \leq \dfrac{11}{4} \\ \Leftrightarrow -\dfrac{9}{8} \leq & k & \leq \dfrac{11}{8} \end{array}$$

  Así, los valores posibles de $k \in \mathbb{Z}$ deben estar en el rango:

$$\begin{aligned} -\frac{9}{8} \leq k \leq \frac{11}{8} \\ \Leftrightarrow -1{,}125 \leq k \leq 1{,}375 \end{aligned}$$

  y los mismos son:

$$k \in \{-1, \ 0, \ 1\}$$

Pero entonces las soluciones obtenidas en esta segunda y última etapa son:

$$\begin{aligned} y_{-1} &= \frac{5}{4}\pi - 2\pi = -\frac{3}{4}\pi \\ y_0 &= \frac{5}{4}\pi \\ y_1 &= \frac{5}{4}\pi + 2\pi = \frac{13}{4}\pi \end{aligned}$$

Finalmente: Juntando todas las soluciones obtenidas, determinamos la solución general como:

$$S = \left\{-\frac{3}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi,\ \frac{11}{4}\pi,\ \frac{13}{4}\pi\right\}$$

Ejemplo 18.3.8. A modo de último ejemplo, resolvamos una ecuación trigonométrica que involucre un manejo algebraico menos elemental, como ser:

$$3\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\cos\left(2x + \frac{5}{3}\pi\right) \tag{18.3.3}$$

en el intervalo $[-3\pi, 6\pi]$.

- Para resolver esta ecuación primero debemos encontrar una expresión equivalente a la misma, pero más simple. Para esto último, observemos que:

$$\begin{aligned} \cos\left(2x + \frac{5}{3}\pi\right) &= \cos\left(2x + \frac{5}{3}\pi - 2\pi + 2\pi\right) \\ &= \cos\left(2x - \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) \end{aligned}$$

Por la periodicidad del coseno, sabemos que $\cos(w + 2\pi = \cos(w))\ \forall\, w \in \mathbb{R}$. Pero entonces:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Reemplazando en la ecuación original (18.3.3), resulta:

$$\begin{aligned} 3\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{3}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)} &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \longleftarrow \text{ pues } \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

De esta forma, hemos simplificado la ecuación original, reemplazándola por otra equivalente, a saber:

$$\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{18.3.4}$$

- A continuación, es conveniente hacer una sustitución:

$$w = 2x - \frac{\pi}{3}$$

mediante la cual convertimos la ecuación (18.3.4) en:

$$\tan(w) = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{18.3.5}$$

Si observamos la tabla de valores para la función tangente, enseguida nos percataremos de que la única solución a la ecuación (18.3.5) en el intervalo fundamental $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ es:

$$w_1 = \frac{\pi}{6}$$

Teniendo en cuenta la periodicidad de la función tangente — *cuyo período es* $P = \pi$ — entonces la solución general sobre todo $\mathbb{R}$ sería:

$$S_{\mathbb{R}}^{w} = \left\{w \in \mathbb{R} / \, w = \frac{\pi}{6} + k\pi \; : \; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Pero esta solución está expresada en términos de w, y nosotros necesitamos los valores de x, no los de w. Para recuperar los valores de x que son solución de la ecuación (18.3.4) procedemos como sigue:

$$2x - \frac{\pi}{3} = w = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

de donde:

$$\begin{aligned} 2x - \frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \Leftrightarrow 2x &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + k\pi \\ \Leftrightarrow 2x &= \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\frac{\pi}{4} + k\pi}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Pero entonces, la solución general sobre todo el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ de la ecuación original (18.3.3) es:

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{x_k \in \mathbb{R} / \, x_k = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \; : \; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

- Para terminar, sólo falta extraer de $S_{\mathbb{R}}$ aquellas soluciones pertenecientes al intervalo $[-3\pi, 6\pi]$. Pero ya en ejemplos anteriores hemos visto como proceder a tales efectos:

$$\begin{array}{rcl} -3\pi \leq & x_k & \leq 6\pi \\ \Leftrightarrow -3\pi \leq & \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} & \leq 6\pi \\ \Leftrightarrow -3\pi - \dfrac{\pi}{8} \leq & \frac{k}{2}\pi & \leq 6\pi - \dfrac{\pi}{8} \\ \Leftrightarrow -\dfrac{25}{8}\cancel{\pi} \leq & \frac{k}{2}\cancel{\pi} & \leq \dfrac{47}{8}\cancel{\pi} \\ \Leftrightarrow -\dfrac{25}{8} \leq & \frac{k}{2} & \leq \dfrac{47}{8} \\ \Leftrightarrow -\dfrac{25}{8} \cdot 2 \leq & k & \leq \dfrac{47}{8} \cdot 2 \\ \Leftrightarrow -\dfrac{25}{4} \leq & k & \leq \dfrac{47}{4} \end{array}$$

Vemos entonces los valores de $k \in \mathbb{Z}$ para que las soluciones x_k pertenezcan al intervalo $[-3\pi, 6\pi]$ deben estar comprendidos entre:

$$\begin{gathered} -\frac{25}{4} \leq k \leq \frac{47}{4} \\ \Leftrightarrow -6{,}25 \leq k \leq 11{,}75 \end{gathered}$$

y por lo tanto deben ser:

$$k \in \{-6, \ -5, \ -4, \ -3, \ \cdots, \ 10, \ 11\}$$

Como podemos observar, hay numerosas soluciones para la ecuación original (18.3.3), y la mejor forma de describir el conjunto solución S será:

$$S = \left\{x_k \in \mathbb{R} / \, x_k = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \; : \; -6 \leq k \leq 11 \, \wedge \, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

18.3.3. Funciones trigonométricas generalizadas

En esta sección nos ocuparemos de las funciones trigonométricas generalizadas, es decir aquellas que son variaciones de las funciones trigonométricas usuales:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x)$$
$$g(x) = \cos(x)$$

a partir de corrimientos verticales u horizontales, cambios en el período y frecuencia así como también corrimientos de fase. Más adelante discutiremos en detalle ciertos términos técnicos como ser los de *amplitud*, *fase*, *frecuencia*, *período* y *centro de oscilación*.

Definición 18.3.6. Llamaremos funciones trigonométricas generalizadas a aquellas que puedan escribirse de la forma:

$$f(x) = a \cdot \operatorname{sen}(bt + c) + d$$
$$g(x) = a \cdot \cos(bt + c) + d$$

donde a, b, c, $d \in \mathbb{R}$.

Cada una de estas constantes desempeña un papel fundamental en el aspecto del gráfico de $f(x)$ o $g(x)$, donde:

$a \longleftarrow$ Se relaciona con la amplitud.
$b \longleftarrow$ Se relaciona con la frecuencia.
$c \longleftarrow$ Se relaciona con la fase.
$d \longleftarrow$ Se relaciona con el centro de oscilación.

A continuación iremos analizando la variación del gráfico de las funciones elementales $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ cuando demos distintos valores a alguno o algunos de los parámetros mencionados anteriormente.

El objetivo principal de las secciones subsiguientes es que el alumno pueda comprender — *uno por uno* — el significado de los parámetros introducidos anteriormente así como también el efecto que producen en el gráfico de la función original.

Una vez que nos familiaricemos con el rol que desempeña cada uno de los parámetros por separado, comenzaremos a variar simultáneamente dos o más de ellos para comprender el efecto conjunto que producen en el gráfico de la función original la variación de los mismos.

18.3.3.1. Variación de la amplitud

En esta sección nos ocuparemos de las funciones de la forma:

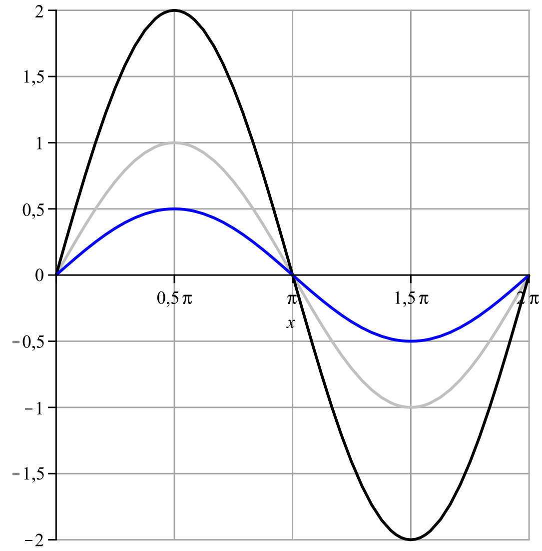
$$f(x) = a \cdot \operatorname{sen}(x)$$
$$g(x) = a \cdot \cos(x)$$

donde $a \in \mathbb{R}$.

Definición 18.3.7. Sea $f(x)$ una función trigonométrica generalizada cualquiera. Llamaremos *amplitud* de f a la distancia máxima que se aparta el gráfico de la misma del centro de oscilación. En la práctica la amplitud se puede definir como un medio de la longitud del intervalo correspondiente a la $\operatorname{Im}(f)$.

A continuación estudiaremos cómo varía la amplitud de una función trigonométrica generalizada cuando modificamos el parámetro a en diferentes ejemplos, de los cuales extraeremos conclusiones generales.

Figura 18.3.5: AMPLITUD DE UNA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA



En la figura pueden apreciarse los gráficos de las funciones:

$f(x) = \operatorname{sen}(x)$ ⟵Gris
$g(x) = 2\operatorname{sen}(x)$ ⟵Negro
$h(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)$ ⟵Azul

Es claro que el efecto del parámetro a ha sido variar la amplitud de la función original $f(x)$. En el caso de $g(x)$ la duplicó. En el caso de $h(x)$ la redujo a la mitad.

Ejemplo 18.3.9. Haga en un mismo sistema de ejes coordenados los gráficos de las funciones:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \qquad g(x) = 2\operatorname{sen}(x) \qquad h(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)$$

Para empezar consideremos la siguiente tabla de valores:

x	$f(x) = \operatorname{sen}(x)$	$g(x) = 2\operatorname{sen}(x)$	$h(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)$
0	0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	2	$\frac{1}{2}$
π	0	0	0
$\frac{3}{2}\pi$	-1	-2	$-\frac{1}{2}$
2π	0	0	0

Si ubicamos estos puntos en un sistema de ejes coordenados y los unimos mediante una curva continua, podremos apreciar el efecto que produjo la variación del parámetro a en el aspecto del gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ — *ver* FIG. 18.3.5.

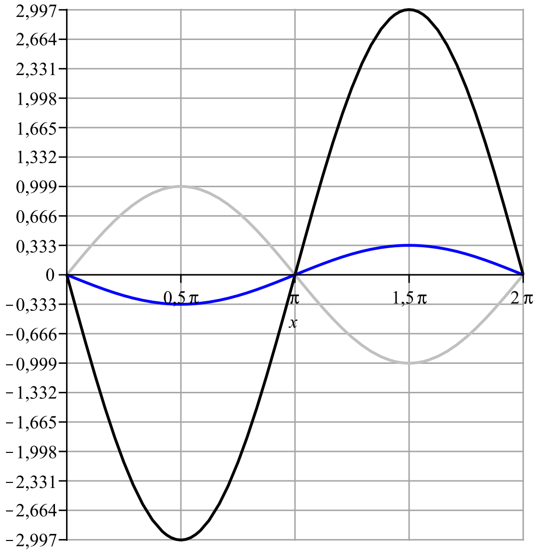
Ejemplo 18.3.10. Realice en un mismo sistema de ejes coordenados los gráficos de las funciones:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \qquad g(x) = -3\operatorname{sen}(x) \qquad h(x) = -\frac{1}{3}\operatorname{sen}(x)$$

Para empezar consideremos la siguiente tabla de valores:

x	$f(x) = \operatorname{sen}(x)$	$g(x) = -3\operatorname{sen}(x)$	$h(x) = -\frac{1}{3}\operatorname{sen}(x)$
0	0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	-3	$-\frac{1}{3}$
π	0	0	0
$\frac{3}{2}\pi$	-1	3	$\frac{1}{3}$
2π	0	0	0

Figura 18.3.6: Amplitud de una función trigonométrica



En la figura pueden apreciarse los gráficos de las funciones:

$f(x) = \operatorname{sen}(x)$ ⟵Gris

$g(x) = -3\operatorname{sen}(x)$ ⟵Negro

$h(x) = -\frac{1}{3}\operatorname{sen}(x)$ ⟵Azul

Es claro que el efecto del parámetro a en este caso ha sido variar no sólo la amplitud de la función original $f(x)$, sino también *reflejar* con respecto al eje x el gráfico de las mismas. En el caso de $g(x)$ triplicó la amplitud y reflejó el gráfico. En el caso de $h(x)$ redujo la amplitud en un factor de 3 y reflejó el gráfico.

Si ubicamos estos puntos en un sistema de ejes coordenados y los unimos mediante una curva continua, podremos apreciar el efecto que produjo la variación del parámetro a en el aspecto del gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ — *ver* Fig. 18.3.6.

Podemos a continuación resumir las conclusiones obtenidas en los dos ejemplos anteriores como sigue:

1. La *amplitud* de la función trigonométrica generalizada se puede calcular como:

$$A = |a|$$

   es decir el valor absoluto del parámetro a.

2. Si el parámetro a es $a > 1$, entonces el gráfico se expanderá en un factor proporcional al valor absoluto de a.

3. Si el parámetro a es $0 < a < 1$, entonces el gráfico se contraerá en un factor proporcional al valor absoluto de a.

4. El signo del parámetro a debe interpretarse como sigue:

   a) Si a es positivo, entonces el gráfico no se reflejará con respecto al eje x.

   b) Si a es negativo, entonces el gráfico se reflejará con respecto al eje x.

Ejercicio 18.3.3. Sea la función:

$$f(x) = a \cdot \cos(x)$$

Elija convenientemente el parámetro a para que la amplitud de la función f sea igual a 5, pero que no se produzca ningún tipo de reflexión con respecto al eje x.

Ejercicio 18.3.4. Sea la función:

$$f(x) = a \cdot \operatorname{sen}(x)$$

Elija convenientemente el parámetro a para que produzca una reflexión con respecto al eje x y además tenga una amplitud $A = \frac{1}{4}$.

18.3.3.2. Variación del centro de oscilación

Consideremos las siguientes funciones trigonométricas:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) + d$$
$$g(x) = \cos(x) + d$$

con $d \in \mathbb{R}$.

Como veremos en una serie de ejemplos a continuación, la variación del parámetro d produce un corrimiento vertical en el gráfico de la función original, cuyo efecto es cambiar el centro de oscilación que normalmente se encuentra anclado en la recta horizontal $y = 0$ — *es decir el eje x*.

Ejemplo 18.3.11. Realice en un mismo sistema de ejes coordenados los gráficos de las funciones:

$$f(x) = \cos(x) \qquad g(x) = \cos(x) + 3 \qquad h(x) = \cos(x) - 3$$

Para empezar consideremos la siguiente tabla de valores:

x	$f(x) = \cos(x)$	$g(x) = \cos(x) + 3$	$h(x) = \cos(x) - 3$
0	1	4	-2
$\frac{\pi}{2}$	0	3	-3
π	-1	2	-4
$\frac{3}{2}\pi$	0	3	-3
2π	1	4	-2

Si ubicamos estos puntos en un sistema de ejes coordenados y los unimos mediante una curva continua, podremos apreciar el efecto que produjo la variación del parámetro d en el aspecto del gráfico de $f(x) = \cos(x)$ — *ver* FIG. 18.3.7.

Ejemplo 18.3.12. Realice en un mismo sistema de ejes coordenados los gráficos de las funciones:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \qquad g(x) = \operatorname{sen}(x) + 1 \qquad h(x) = \operatorname{sen}(x) - 1$$

Para empezar consideremos la siguiente tabla de valores:

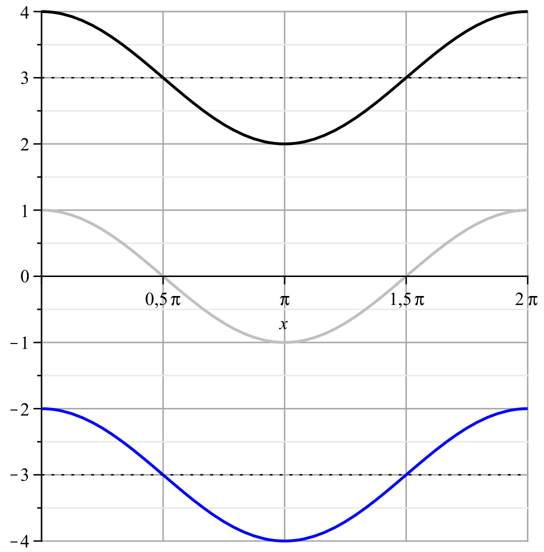
x	$f(x) = \operatorname{sen}(x)$	$g(x) = \operatorname{sen}(x) + 1$	$h(x) = \operatorname{sen}(x) - 1$
0	0	1	-1
$\frac{\pi}{2}$	1	2	0
π	0	1	-1
$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	-2
2π	0	1	-1

Si ubicamos estos puntos en un sistema de ejes coordenados y los unimos mediante una curva continua, podremos apreciar el efecto que produjo la variación del parámetro d en el aspecto del gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ — *ver* FIG. 18.3.8.

Podemos a continuación resumir las conclusiones obtenidas en los ejemplos anteriores como sigue:

- El efecto del parámetro d es desplazar el centro de oscilación de la función trigonométrica original, de la siguiente forma:
  - Si $d > 0$ lo desplaza d unidades hacia arriba.
  - Si $d < 0$ lo desplaza $|d|$ unidades hacia abajo.

Figura 18.3.7: Centro de oscilación de una función trigonométrica

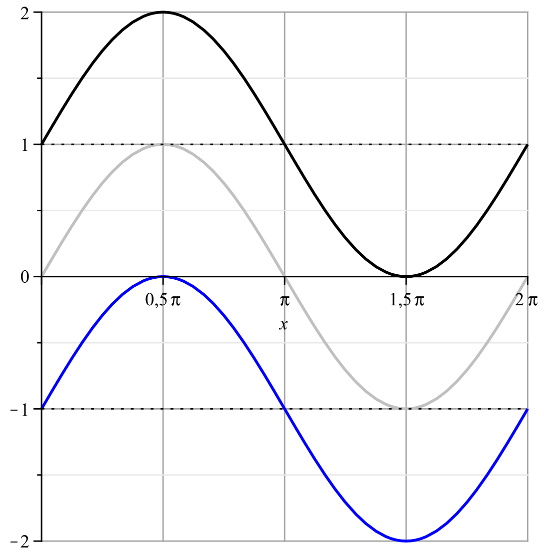


En la figura pueden apreciarse los gráficos de las funciones:

$f(x) = \cos(x)$ ⟵Gris
$g(x) = \cos(x) + 3$ ⟵Negro
$h(x) = \cos(x) - 3$ ⟵Azul

Es claro que el efecto del parámetro d en este caso ha sido modificar el centro de oscilación de la función original $f(x)$. En el caso de $g(x)$ lo desplazó 3 unidades hacia arriba. En el caso de $h(x)$ lo desplazó 3 unidades hacia abajo.

Figura 18.3.8: Centro de oscilación de una función trigonométrica



En la figura pueden apreciarse los gráficos de las funciones:

$f(x) = \operatorname{sen}(x)$ ⟵Gris
$g(x) = \operatorname{sen}(x) + 1$ ⟵Negro
$h(x) = \operatorname{sen}(x) - 1$ ⟵Azul

Es claro que el efecto del parámetro d en este caso ha sido modificar el centro de oscilación de la función original $f(x)$. En el caso de $g(x)$ lo desplazó una unidad hacia arriba. En el caso de $h(x)$ lo desplazó una unidad hacia abajo.

18.3.3.3. Variación del período y/o la frecuencia

En una función periódica $y = f(x)$ cualquiera, habíamos definido el período P como el menor número real positivo con la propiedad de que:

$$f(x+P) = f(x) \ \forall \, x \in \mathbb{R}$$

Además habíamos mencionado que la frecuencia de una función periódica se calcula según la expresión:

$$F = \frac{1}{P}$$

En el caso de una función trigonométrica generalizada como ser:

$$f(x) = a \cdot \operatorname{sen}(bx+c) + d$$
$$g(x) = a \cdot \cos(bx+c) + d$$

el parámetro encargado de controlar el período y/o la frecuencia es b.

Las expresiones para obtener el período P y la frecuencia F de alguna de estas funciones son:

$$P = \frac{2\pi}{|b|} \qquad\qquad F = \frac{1}{P} = \frac{|b|}{2\pi} \tag{18.3.6}$$

En los ejemplos a continuación podremos apreciar gráficamente el efecto de variar el parámetro b en diferentes funciones trigonométricas.

Ejemplo 18.3.13. Realice en un mismo sistema de ejes coordenados los gráficos de las funciones:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \qquad\qquad g(x) = \operatorname{sen}(2x)$$

Cuando haya una modificación en el período o la frecuencia de una función trigonométrica, tendremos que hacer un análisis previo sobre cuál es el intervalo fundamental donde será conveniente implementar la tabla de valores para graficar la función.

En el caso de:

$$g(x) = \operatorname{sen}(2x) \longleftarrow \boxed{b=2}$$

en virtud de la ecuación (18.3.6) podemos obtener su período P según:

$$P = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

Pero entonces el intervalo fundamental donde la función cumple un ciclo de oscilación será:

$$[0, \pi]$$

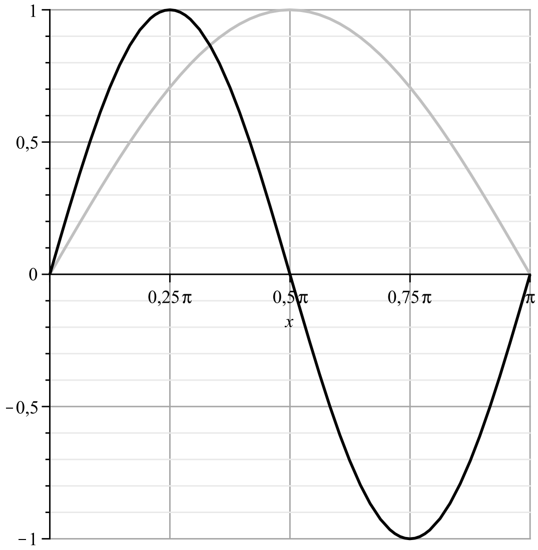
razón por la cual será conveniente implementar una tabla de valores que subdivida dicho intervalo en cuatro partes, evaluando la misma en los valores:

$$x = 0, \ \frac{\pi}{4}, \ \frac{\pi}{2}, \ \frac{3}{4}\pi, \ \pi$$

Si procedemos según el razonamiento anterior, obtendríamos la siguiente tabla de valores:

x	$f(x) = \operatorname{sen}(x)$	$g(x) = \operatorname{sen}(2x)$
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0
$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
π	0	0

Figura 18.3.9: Período de una función trigonométrica



En la figura pueden apreciarse los gráficos de las funciones:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \qquad \longleftarrow \text{Gris}$$
$$g(x) = \operatorname{sen}(2x) \qquad \longleftarrow \text{Negro}$$

Es claro que el efecto del parámetro b en este caso ha sido modificar el período de la función original $f(x)$. Mientras $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ tenía un período $P = 2\pi$, la función $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$ tendrá un período $P = \pi$, que es la mitad del anterior. Obsérvese además que mientras la función $f(x)$ apenas realiza medio ciclo, la función $g(x)$ realiza un ciclo completo en el intervalo $[0, \pi]$.

Si ubicamos estos puntos en un sistema de ejes coordenados y los unimos mediante una curva continua, podremos apreciar el efecto que produjo la variación del parámetro b en el aspecto del gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ — *ver* Fig. 18.3.9.

Ejemplo 18.3.14. Haga en un mismo sistema de ejes coordenados los gráficos de las funciones:

$$f(x) = \cos(x) \qquad\qquad g(x) = \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$$

Como hemos mencionado en el ejemplo anterior, cuando haya una modificación en el período o la frecuencia de una función trigonométrica, tendremos que hacer un análisis previo sobre cuál es el intervalo fundamental donde será conveniente implementar la tabla de valores para graficar la función.

En el caso de:

$$g(x) = \cos\left(\frac{1}{3}x\right) \longleftarrow \boxed{b = \frac{1}{3}}$$

en virtud de la ecuación (18.3.6) podemos obtener su período P según:

$$P = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$$

Pero entonces el intervalo fundamental donde la función cumple un ciclo de oscilación será:

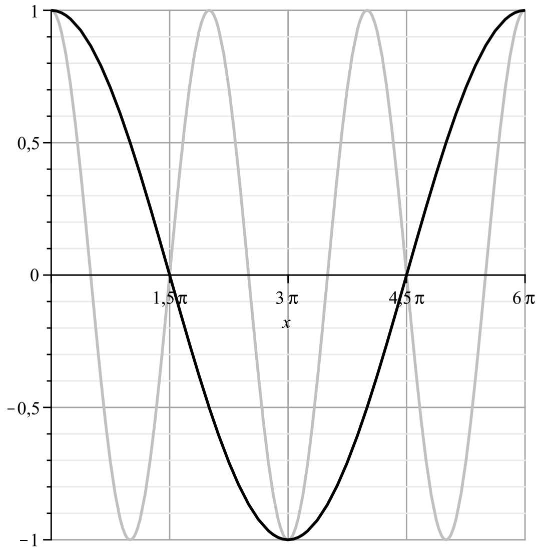
$$[0, 6\pi]$$

razón por la cual será conveniente implementar una tabla de valores que subdivida dicho intervalo en cuatro partes, evaluando la misma en los valores:

$$x = 0,\ \frac{3}{2}\pi,\ 3\pi,\ \frac{9}{2}\pi,\ 6\pi$$

Si procedemos según el razonamiento anterior, obtendríamos la siguiente tabla de valores:

Figura 18.3.10: Período de una función trigonométrica



En la figura pueden apreciarse los gráficos de las funciones:

$f(x) = \cos(x)$ ⟵Gris

$g(x) = \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$ ⟵Negro

Es claro que el efecto del parámetro b en este caso ha sido modificar el período de la función original $f(x)$. Mientras $f(x) = \cos(x)$ tenía un período $P = 2\pi$, la función $g(x) = \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$ tendrá un período $P = 6\pi$, es decir tres veces más grande. Obsérvese además que mientras la función $g(x)$ realiza un único ciclo en el intervalo $[0, 6\pi]$, la función $f(x)$ en el mismo intervalo realiza tres ciclos completos.

x	$f(x) = \cos(x)$	$g(x) = \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$
0	1	1
$\frac{3}{2}\pi$	0	0
3π	−1	−1
$\frac{9}{2}\pi$	0	0
6π	1	1

Si ubicamos estos puntos en un sistema de ejes coordenados y los unimos mediante una curva continua, podremos apreciar el efecto que produjo la variación del parámetro b en el aspecto del gráfico de $f(x) = \cos(x)$ — *ver* Fig. 18.3.10.

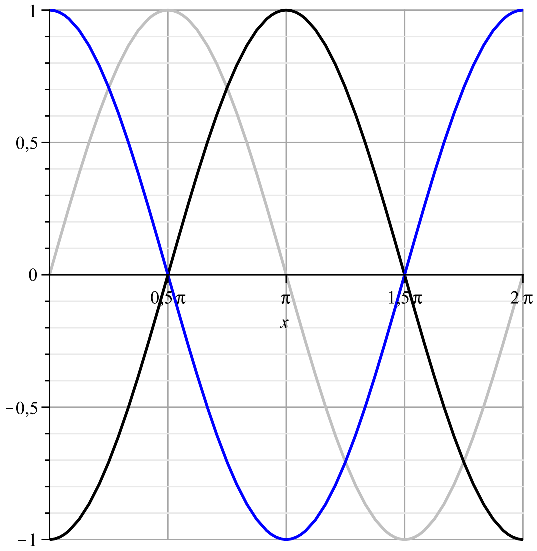
18.3.3.4. Variación de la fase

El último parámetro que nos resta analizar es el parámetro c, que tiene que ver con la *fase* de una función trigonométrica. Para comprender la noción de *fase*, prestemos atención a la Fig. 18.3.11, donde se muestran los gráficos de:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \qquad g(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad h(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

El lector podrá comprobar visualmente que el gráfico de la función $g(x)$ es el mismo que el de la función $f(x)$ sólo que desplazado $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la derecha, mientras el gráfico de $h(x)$ es el mismo que el de la función $f(x)$ pero esta vez desplazado $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda.

Figura 18.3.11: Fase de una función trigonométrica



En la figura pueden apreciarse los gráficos de las funciones:

$f(x) = \operatorname{sen}(x)$ ⟵Gris

$g(x) = \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ ⟵Negro

$h(x) = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ ⟵Azul

Obsérvese que el gráfico de $g(x)$ es análogo al de $f(x)$ pero desplazado $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la derecha, mientras que el gráfico de $h(x)$ también es análogo al de $f(x)$, pero esta vez desplazado $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda.

Precisamente con este tipo de comportamiento se relaciona la noción de *fase*. La fase tiene que ver con el punto de partida del gráfico de una función trigonométrica generalizada, en el punto inicial de su intervalo fundamental donde la misma realiza un ciclo completo, siempre tomando como referencia los gráficos de las funciones usuales:

$$y = \cos(x) \qquad\qquad y = \operatorname{sen}(x)$$

Hablamos pues de *desfasaje* cuando los gráficos de las funciones trigonométricas se encuentren desplazados horizontalmente — *o bien hacia la derecha o bien hacia la izquierda* — con respecto a la referencia que nos dan los gráficos usuales de las funciones $y = \operatorname{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$.

Por lo expuesto anteriormente podemos concluir que:

- La variación del gráfico de las funciones:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x + c)$$
$$g(x) = \cos(x + c)$$

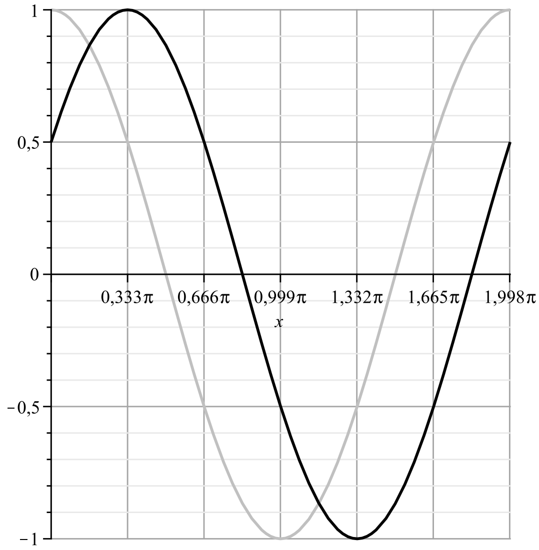
  se produce de la siguiente forma:

  - Si $c > 0$ entonces el gráfico original se desplaza horizontalmente c unidades hacia la izquierda.
  - Si $c < 0$ entonces el gráfico original se desplaza horizontalmente $|c|$ unidades hacia la derecha.

Ejemplo 18.3.15. Realizar el gráfico de las funciones:

$$f(x) = \cos(x)$$
$$g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Figura 18.3.12: Fase de una función trigonométrica



En la figura pueden apreciarse los gráficos de las funciones:

$f(x) = \cos(x)$ ⟵Gris

$g(x) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ ⟵Negro

Obsérvese que el gráfico de $g(x)$ es análogo al de $f(x)$ pero desplazado $\frac{\pi}{3}$ unidades hacia la derecha.

en un mismo sistema de ejes coordenados y comprobar el efecto que produce el desfasaje producido.

La forma de proceder es muy sencilla.

Como:

$$c = -\frac{\pi}{3}$$

entonces en el gráfico de $g(x)$ se producirá un corrimiento de $\frac{\pi}{3}$ unidades hacia la derecha con respecto al gráfico de $f(x)$, tal como se puede apreciar en la Fig. 18.3.12.

Ejemplo 18.3.16. Realizar el gráfico de las funciones:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x)$$
$$g(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

en un mismo sistema de ejes coordenados y comprobar el efecto que produce el desfasaje producido.

La forma de proceder es muy sencilla.

Como:

$$c = \frac{\pi}{4}$$

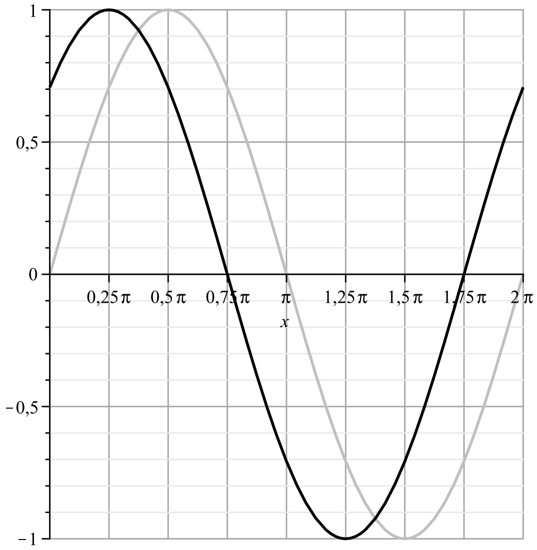
entonces en el gráfico de $g(x)$ se producirá un corrimiento de $\frac{\pi}{4}$ unidades hacia la izquierda con respecto al gráfico de $f(x)$, tal como se puede apreciar en la Fig. 18.3.13.

18.3.3.5. Variación de múltiples parámetros

A continuación veremos una serie de ejemplos para aprender cómo manejar la variación de más de un parámetro en forma simultánea, para poder graficar correctamente una función trigonométrica generalizada de la forma:

$$f(x) = a \cdot \operatorname{sen}(bx + c) + d$$
$$g(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d$$

Figura 18.3.13: Fase de una función trigonométrica



En la figura pueden apreciarse los gráficos de las funciones:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \qquad \longleftarrow \text{Gris}$$

$$g(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \longleftarrow \text{Negro}$$

Obsérvese que el gráfico de $g(x)$ es análogo al de $f(x)$ pero desplazado $\frac{\pi}{4}$ unidades hacia la izquierda.

don a, b, c, $d \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 18.3.17. Graficar la siguiente función trigonométrica generalizada:

$$f(x) = 3\operatorname{sen}(x) + 2$$

indicando su amplitud, centro de oscilación, período, frecuencia, fase e imagen. Si $[a, b]$ es el intervalo fundamental donde $f(x)$ realiza un ciclo completo de oscilación, determinar los extremos locales y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ en dicho intervalo.

Solución:

Para empezar, como $a = 3$, entonces la amplitud de la función trigonométrica es:

$$A = |a| = |3| = 3$$

lo cual indica que la función $f(x)$ se apartará tres unidades hacia arriba y hacia abajo de su centro de oscilación.

Con respecto al centro de oscilación, como $d = 2$ entonces el mismo será la recta $y = 2$.

Para el período y frecuencia, como $b = 1$ entonces:

$$P = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \qquad F = \frac{1}{P} = \frac{1}{2\pi}$$

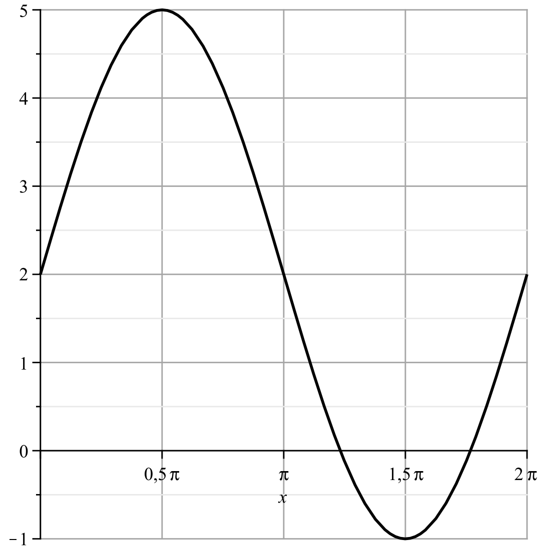
lo cual indica que el intervalo fundamental donde la función $f(x)$ cumple un ciclo de oscilación es:

$$[0, 2\pi]$$

La fase es $c = 0$.

Podemos ahora hacer una tabla de valores subdividiendo el intervalo fundamental en cuatro subintervalos:

Figura 18.3.14: GRÁFICO DE LA FUNCIÓN $f(x) = 3\text{sen}(x) + 2$



En la figura puede apreciarse el gráfico de la función $f(x) = 3\text{sen}(x) + 2$.

x	$f(x) = 3\text{sen}(x) + 2$
0	2
$\frac{\pi}{2}$	5
π	2
$\frac{3}{2}\pi$	-1
2π	2

Según los datos de la tabla, podemos graficar $y = f(x)$ tal como lo muestra la FIG. 18.3.14, de la cual podemos deducir que:

$$\text{Im}(f) = [-1, 5]$$

Del gráfico se deduce inmediatamente que hay un máximo absoluto en $x_1 = \frac{\pi}{2}$ cuyo valor máximo es $y_1 = 5$ y un mínimo absoluto en $x_2 = \frac{3}{2}\pi$, cuyo valor mínimo es $y_2 = -1$.

Intervalos de crecimiento:

$$\text{I.C.} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$$

Intervalos de decrecimiento:

$$\text{I.D.} = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$$

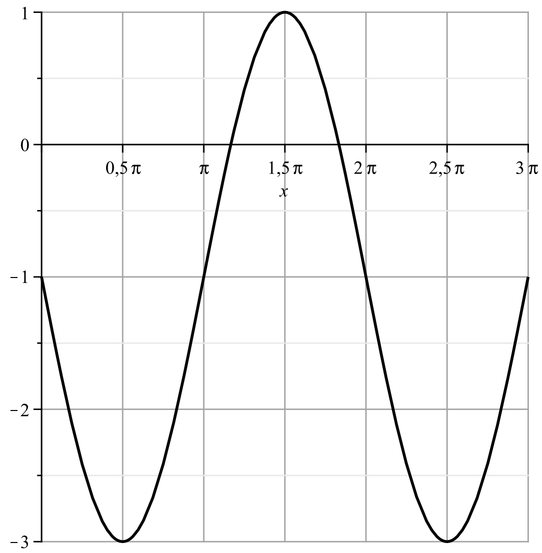
Ejemplo 18.3.18. Graficar la siguiente función trigonométrica generalizada:

$$f(x) = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$$

indicando su amplitud, centro de oscilación, período, frecuencia, fase e imagen. Si $[a, b]$ es el intervalo fundamental donde $f(x)$ realiza un ciclo completo de oscilación, determinar los extremos locales y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ en dicho intervalo.

Solución:

Figura 18.3.15: Gráfico de la función $f(x) = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$



En la figura puede apreciarse el gráfico de la función $f(x) = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$.

Para empezar, como $a = -2$, entonces la amplitud de la función trigonométrica es:

$$A = |a| = |-2| = 2$$

lo cual indica que la función $f(x)$ se apartará dos unidades hacia arriba y hacia abajo de su centro de oscilación.

Con respecto al centro de oscilación, como $d = -1$ entonces el mismo será la recta $y = -1$.

La fase es $c = -\frac{\pi}{2}$, o sea el gráfico de la función se desplazará $\frac{\pi}{2}$ unidades a la derecha.

Para el período y frecuencia, como $b = 1$ entonces:

$$P = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \qquad F = \frac{1}{P} = \frac{1}{2\pi}$$

lo cual indica — *junto con la información de la fase* — que el intervalo fundamental donde la función $f(x)$ cumple un ciclo de oscilación es:

$$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi\right]$$

Podemos ahora hacer una tabla de valores subdividiendo el intervalo fundamental en cuatro subintervalos:

x	$f(x) = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$
$\frac{\pi}{2}$	-3
π	0
$\frac{3}{2}\pi$	1
2π	0
$\frac{5}{2}\pi$	-3

Según los datos de la tabla, podemos graficar $y = f(x)$ tal como lo muestra la Fig. 18.3.15, de la cual podemos deducir que:

$$\operatorname{Im}(f) = [-3, 1]$$

Del gráfico se deduce inmediatamente que hay un máximo absoluto en $x_1 = \frac{3}{2}\pi$ cuyo valor máximo es $y_1 = 1$ y un mínimo absoluto en $x_2 = \frac{\pi}{2}$, cuyo valor mínimo es $y_2 = -3$.

Intervalos de crecimiento:

$$\text{I.C.} = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$$

Intervalos de decrecimiento:

$$\text{I.D.} = \left[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$$

Ejemplo 18.3.19. Graficar la siguiente función trigonométrica generalizada:

$$f(x) = -\cos(3x) + 2$$

indicando su amplitud, centro de oscilación, período, frecuencia, fase e imagen. Si $[a, b]$ es el intervalo fundamental donde $f(x)$ realiza un ciclo completo de oscilación, determinar los extremos locales y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ en dicho intervalo.

Solución:

Para empezar, como $a = -1$, entonces la amplitud de la función trigonométrica es:

$$A = |a| = |-1| = 1$$

lo cual indica que la función $f(x)$ se apartará una unidad hacia arriba y hacia abajo de su centro de oscilación.

Con respecto al centro de oscilación, como $d = 2$ entonces el mismo será la recta $y = 2$.

La fase es $c = 0$.

Para el período y frecuencia, como $b = 3$ entonces:

$$P = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3} = 2\pi \qquad F = \frac{1}{P} = \frac{3}{2\pi}$$

lo cual indica — *junto con la información de la fase* — que el intervalo fundamental donde la función $f(x)$ cumple un ciclo de oscilación es:

$$\left[0, \frac{2}{3}\pi\right]$$

Podemos ahora hacer una tabla de valores subdividiendo el intervalo fundamental en cuatro subintervalos:

x	$f(x) = -\cos(3x) + 2$
0	1
$\frac{\pi}{6}$	2
$\frac{\pi}{3}$	3
$\frac{\pi}{2}$	2
$\frac{2}{3}\pi$	1

Según los datos de la tabla, podemos graficar $y = f(x)$ tal como lo muestra la Fig. 18.3.16, de la cual podemos deducir que:

$$\text{Im}(f) = [1, 3]$$

Del gráfico se deduce inmediatamente que hay un máximo absoluto en $x_1 = \frac{\pi}{3}$ cuyo valor máximo es $y_1 = 3$ y dos mínimos absolutos en $x_2 = 0$ y $x_3 = \frac{2}{3}\pi$, cuyo valor mínimo es $y = 1$.

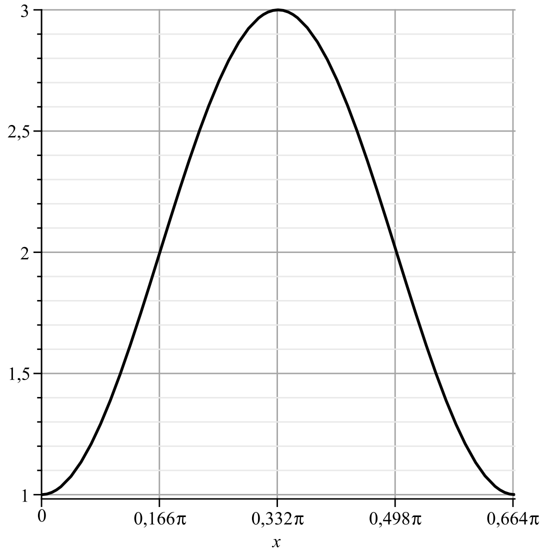
Intervalos de crecimiento:

$$\text{I.C.} = \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

Intervalos de decrecimiento:

$$\text{I.D.} = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right]$$

Figura 18.3.16: Gráfico de la función $f(x) = -\cos(3x) + 2$



En la figura puede apreciarse el gráfico de la función $f(x) = -\cos(3x) + 2$.

Ejemplo 18.3.20. Graficar la siguiente función trigonométrica generalizada:

$$f(x) = 3\operatorname{sen}(2x) + 1$$

indicando su amplitud, centro de oscilación, período, frecuencia, fase e imagen. Si $[a, b]$ es el intervalo fundamental donde $f(x)$ realiza un ciclo completo de oscilación, determinar los extremos locales y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ en dicho intervalo.

Solución:

Para empezar, como $a = 3$, entonces la amplitud de la función trigonométrica es:

$$A = |a| = |3| = 3$$

lo cual indica que la función $f(x)$ se apartará tes unidades hacia arriba y hacia abajo de su centro de oscilación.

Con respecto al centro de oscilación, como $d = 1$ entonces el mismo será la recta $y = 1$.

La fase es $c = 0$.

Para el período y frecuencia, como $b = 2$ entonces:

$$P = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi \qquad\qquad F = \frac{1}{P} = \frac{1}{\pi}$$

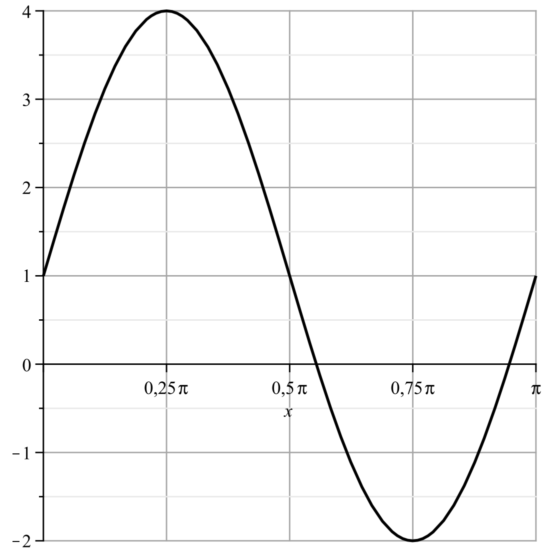
lo cual indica — *junto con la información de la fase* — que el intervalo fundamental donde la función $f(x)$ cumple un ciclo de oscilación es:

$$[0, \pi]$$

Podemos ahora hacer una tabla de valores subdividiendo el intervalo fundamental en cuatro subintervalos:

x	$f(x) = 3\operatorname{sen}(2x) + 1$
0	1
$\frac{\pi}{4}$	4
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{3}{4}\pi$	-2
π	1

Figura 18.3.17: Gráfico de la función $f(x) = 3\text{sen}(2x) + 1$



En la figura puede apreciarse el gráfico de la función $f(x) = 3\text{sen}(2x) + 1$.

Según los datos de la tabla, podemos graficar $y = f(x)$ tal como lo muestra la Fig. 18.3.17, de la cual podemos deducir que:

$$\text{Im}(f) = [-2, 4]$$

Del gráfico se deduce inmediatamente que hay un máximo absoluto en $x_1 = \frac{\pi}{4}$ cuyo valor máximo es $y_1 = 4$ y un mínimo absolutos en $x_2 = \frac{3}{4}\pi$ cuyo valor mínimo es $y_2 = -2$.

Intervalos de crecimiento:

$$\text{I.C.} = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]; \left[\frac{3}{4}\pi, \pi\right]$$

Intervalos de decrecimiento:

$$\text{I.D.} = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$$

18.3.4. Identidades trigonométricas

En las secciones 18.3.1.7 en la pág. 358 y 18.3.1.8 en la pág. 359 hemos visto importantes identidades trigonométricas.

Las mismas pueden ser utilizadas para demostrar nuevas y variadas identidades más complejas, como veremos en los ejemplos a continuación.

Ejemplo 18.3.21. Demostrar la siguiente identidad trigonométrica:

$$\text{cosec}(x) - \text{sen}(x) = \text{cotan}(x)\cos(x)$$

Solución:

Tengamos presente que:

$$\text{cosec}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)} \qquad \text{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$$

Si reemplazamos estas expresiones en la ecuación original, obtenemos:

$$\begin{aligned}\operatorname{cosec}(x) - \operatorname{sen}(x) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} - \operatorname{sen}(x)\\ &= \frac{1-\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}(x)}\end{aligned}$$

Teniendo presente que:

$$1 - \operatorname{sen}^2(x) = \cos^2(x)$$

entonces reemplazando en la última expresión se obtiene que:

$$\begin{aligned}\operatorname{cosec}(x) - \operatorname{sen}(x) &= \frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)}\\ &= \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \cdot \cos(x)\\ &= \operatorname{cotan}(x)\cos(x)\end{aligned}$$

Luego:

$$\operatorname{cosec}(x) - \operatorname{sen}(x) = \operatorname{cotan}(x)\cos(x)$$

tal como queríamos demostrar.

Ejemplo 18.3.22. Demostrar la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{\tan(x)(1-\operatorname{sen}(x))(1+\operatorname{sen}(x))}{\cos(x)} = \operatorname{sen}(x)$$

Solución:

Observemos primero que por diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned}(1-\operatorname{sen}(x))(1+\operatorname{sen}(x)) &= 1-\cos^2(x)\\ &= \operatorname{sen}^2(x)\end{aligned}$$

Teniendo presente además que:

$$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

entonces la igualdad del enunciado se transforma en:

$$\begin{aligned}\frac{\tan(x)(1-\operatorname{sen}(x))(1+\operatorname{sen}(x))}{\cos(x)} &= \frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cancel{\cos(x)}}\cdot\cos^{\cancel{2}}(x)}{\cos(x)}\\ &= \frac{\operatorname{sen}(x)\cdot\cancel{\cos(x)}}{\cancel{\cos(x)}}\\ &= \operatorname{sen}(x)\end{aligned}$$

Luego:

$$\frac{\tan(x)(1-\operatorname{sen}(x))(1+\operatorname{sen}(x))}{\cos(x)} = \operatorname{sen}(x)$$

tal como queríamos demostrar.

Notación y Simbología

A continuación presentamos una lista de notaciones y simbología básicas utilizadas a lo largo de la exposición de los temas tratados.

Símbolo	Significado	Símbolo	Significado
$\forall$	para todo	$\exists$	existe
$\vee$	o	$\nexists$	no existe
$\wedge$	y	$/$	tal que
$=$	igual	$\therefore$	en consecuencia
$\neq$	distinto	$\in$	pertenece
$>$	mayor	$\notin$	no pertenece
$\geq$	mayor o igual	$\subset$	incluido
$<$	menor	$\subseteq$	incluido o igual
$\leq$	menor o igual	$\supset$	incluye
$\Rightarrow$	entonces	$\supseteq$	incluye o es igual
$\Leftarrow$	entonces	$\cup$	unión
$\Leftrightarrow$	si y sólo si	$\cap$	intersección
mcd	máximo común divisor	$\mid$	divide a
mcm	mínimo común múltiplo	$\nmid$	no divide a
$+$	más	$\emptyset$	conjunto vacío
$-$	menos	$\cdot$	producto